∼ Flash Maths ∼
Terminale S

Équation du second degré
Équation : $P(x)=0$ avec $P(x)=ax^2+bx+c$.

$\Delta = b^2-4ac$	>0	$=0$
Solution(s)	$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_1=-\frac{b}{2a}$
$P(x)$	$a(x-x_1)(x-x_2)$	$a(x-x_1)^2$

$\Delta<0 \Rightarrow$ pas de solution réelle.

Dérivation
Nombre dérivé en a : $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
Tangente à $y=f(x)$ en $A(a,f(a))$: $y=f(a)+f'(a)(x-a)$.
Linéarité : $(\lambda f(x)+g(x))'=\lambda f'(x)+g'(x)$.
Dérivées : $a'=0$, $x'=1$, $(ax+b)'=a$, $(x^2)'=2x$, $(x^n)'=nx^{n-1}$, $(\sin(x))'=\cos(x)$, $(\cos(x))'=-\sin(x)$, $(e^x)'=e^x$, $(\ln(x))'=\frac{1}{x}$, $(a^x)'=\ln(a)a^x$, $(uv)'=u'v+uv'$, $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$, $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$, $(\tan(x))'=1+(\tan(x))^2$.
Dérivées de composées : $(f(ax+b))'=af'(ax+b)$, $(u^n)'=u'nu^{n-1}$, $(\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$, $(\cos(u))'=-u'\sin(u)$, $(\sin(u))'=u'\cos(u)$, $(e^u)'=u'e^u$, $(\ln(|u|))'=\frac{u'}{u}$, $(f\circ u)'(x)=u'(x)f'(u(x))$.

Exponentielle
Définition : $(\exp(x))'=\exp(x)$, $\exp(0)=1$. $D_{\exp}=\mathbb{R}$.
Expression : $\exp(x)=e^x=$ "$2,71828$ puissance x".
Propriétés : e^x est strictement croissante, $e^xe^y=e^{x+y}$, $e^{-x}=\frac{1}{e^x}$, $(e^x)^n=e^{nx}$, $\frac{e^x}{e^y}=e^{x-y}$, $\sqrt{e^x}=e^{\frac{x}{2}}$, $e^x>1+x$.
Limites : $\lim_{x\to-\infty}e^x=0$, $\lim_{x\to+\infty}e^{-x}=0$, $\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$, $\lim_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty}x^ne^{-x}=0$.

Nombres complexes
Définition : $i^2=-1$, $\forall z\in\mathbb{C}, \exists$ deux uniques $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ t.q. $z=a+ib$.
Conjugué : $z=a+ib\Rightarrow \overline{z}=a-ib$, $z+\overline{z}=2a$, $z-\overline{z}=2bi$, $z\overline{z}=\overline{z}z=a^2+b^2$, $\frac{1}{z}=\frac{\overline{z}}{z\overline{z}}$, $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.
Module : $|z|=\sqrt{z\overline{z}}=\sqrt{a^2+b^2}$, $|z|=|\overline{z}|=|-\overline{z}|$, $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$, $\frac{1}{z}=\frac{\overline{z}}{|z|^2}=\frac{a}{a^2+b^2}+i\left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$, $|z+z'|\le|z|+|z'|$.
Forme trigonométrique : $z=r(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$, $r=|z|$, $\theta=\arg(z)$.
Forme exponentielle : $z=re^{i\theta}$, $zz'=rr'e^{i(\theta+\theta')}$, $\frac{1}{z}=\frac{1}{r}e^{-i\theta}$.
Formules d'addition : $\cos(x+y)=\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)$, $\sin(x+y)=\sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y)$.

Valeurs :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\cos(x)$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

, $\tan=\frac{\sin}{\cos}$.

Continuité
Définition : f continue en $a \Leftrightarrow \forall\epsilon>0, \exists h>0$ t.q. $\forall x\in]a-h;a+h[\cap D_f, |f(x)-f(a)|\le\epsilon$.
Propriétés : f dérivable en $a\Rightarrow f$ continue en a.
f et g continues en $a\Rightarrow f+g$ et $f\times g$ continues en a.
Théorème des valeurs intermédiaires (*tvi*) : f continue sur I et $(a,b)\in I^2\Rightarrow\forall k\in]f(a);f(b)[, \exists c\in]a;b[$ t.q. $f(c)=k$.
Corollaire du *tvi* (*ctvi*) : f continue et strictement monotone sur I et $(a,b)\in I^2\Rightarrow\forall k\in]f(a);f(b)[, \exists$ un unique $c\in]a;b[$ t.q. $f(c)=k$.

Logarithme népérien
Définition : $\ln(x)=y\Leftrightarrow x=e^y$. $D_{\ln}=]0,+\infty[$.
Valeurs particulières : $\ln(1)=0$, $\ln(e)=1$.
Propriétés : $\ln(e^x)=x$, $e^{\ln(x)}=x$, $\ln(x)$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$, $\ln(xy)=\ln(x)+\ln(y)$, $\ln\left(\frac{1}{x}\right)=-\ln(x)$, $\ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln(x)-\ln(y)$, $\ln(x^n)=n\ln(x)$, $\ln(\sqrt{x})=\frac{1}{2}\ln(x)$.
Limites : $\lim_{x\to 0}\ln(x)=-\infty$, $\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^n}=0$, $\lim_{x\to 0}x^n\ln(x)=0$, $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$.
Dérivée : $(\ln(x))'=\frac{1}{x}$, $(\ln(|u|))'=\frac{u'}{u}$.
Fonctions puissances : $a^x=e^{x\ln(a)}$, $a^xa^y=a^{x+y}$, $(a^x)^y=a^{xy}$, $\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$, $(a^x)'=\ln(a)a^x$.

Géométrie
Produit scalaire : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=OA\times OB\times\cos(\widehat{AOB})$.
$\overrightarrow{u}(a,b,c)$, $\overrightarrow{v}(a',b',c')$, $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=aa'+bb'+cc'$.
Norme euclidienne : $\|\overrightarrow{u}\|=\sqrt{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.
Propriétés : $\|\overrightarrow{u}\|=0\Leftrightarrow\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$, $\|-\overrightarrow{u}\|=\|\overrightarrow{u}\|$, $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{(-v)}=-\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$, $\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2=\|\overrightarrow{u}\|^2+\|\overrightarrow{v}\|^2+2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$, $\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2=\|\overrightarrow{u}\|^2+\|\overrightarrow{v}\|^2-2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{v}$.
Droite : La représentation paramétrique d'une droite définie par $A(x_A,y_A,z_A)$ et $\overrightarrow{u}(a,b,c)$ est : $\begin{cases} x=x_A+sa, \\ y=y_A+sb, \\ z=z_A+sc, \end{cases}$, $s\in\mathbb{R}$.
Équation cartésienne d'une droite (d) : $ax+by+c=0$.
Vecteur normal : $\overrightarrow{n}(a,b)$. Vecteur directeur : $\overrightarrow{u}(-b,a)$.
Distance de $A(x_A,y_A)$ à (d) : $\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
Plan : La représentation paramétrique d'un plan défini par $A(x_A,y_A,z_A)$, $\overrightarrow{u}(a,b,c)$ et $\overrightarrow{v}(a',b',c')$ est : $\begin{cases} x=x_A+sa+ta', \\ y=y_A+sb+tb', \\ z=z_A+sc+tc', \end{cases}$ $(s,t)\in\mathbb{R}^2$.
Équation cartésienne d'un plan $\mathcal{P}$: $ax+by+cz+d=0$.
Vecteur normal : $\overrightarrow{n}(a,b,c)$.
Distance de $A(x_A,y_A,z_A)$ à $\mathcal{P}$: $\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.
Propriétés : $\mathcal{P}\perp\mathcal{P}'\Leftrightarrow\overrightarrow{n}.\overrightarrow{n'}=0$, $(d)\perp\mathcal{P}'\Leftrightarrow(d)\perp$ toutes les droites $(d')\in\mathcal{P}'$.
Cercle : centre $A(x_A,y_A)$, rayon R : $(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=R^2$.

Suites
Suite arithmétique : $u_{n+1}=u_n+r$, $u_n=u_0+nr$.
Sommes : $\sum_{k=0}^{n}u_k=\frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$, $\sum_{k=1}^{n}u_k=\frac{n(u_1+u_n)}{2}$.
Suite géométrique : $u_{n+1}=qu_n$, $u_n=u_0q^n$.
Sommes : $\sum_{k=0}^{n}u_k=u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, $\sum_{k=1}^{n}u_k=u_1\frac{1-q^n}{1-q}$.
Limite : $\lim_{n\to\infty}q^n=0\Leftrightarrow q\in]-1,1[$.
Monotonie : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante $\Leftrightarrow\forall n\in\mathbb{N}, u_n\le u_{n+1}$.
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante $\Leftrightarrow\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}\le u_n$.
Dans les applications, on compare $u_{n+1}-u_n$ à 0 ou $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.
Bornes : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ majorée $\Leftrightarrow\exists M\in\mathbb{R}$ t.q. $\forall n\in\mathbb{N}, u_n\le M$.
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ minorée $\Leftrightarrow\exists m\in\mathbb{R}$ t.q. $\forall n\in\mathbb{N}, u_n\ge m$.
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée $\Leftrightarrow(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ minorée et majorée.
Suite convergente : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\Leftrightarrow\exists\ell\in\mathbb{R}$ t.q. $\lim_{n\to\infty}u_n=\ell$.
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}u_n=\ell$.
Critères : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et majorée $\Rightarrow(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et minorée $\Rightarrow(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente $\Rightarrow(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée.
Propriétés : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et f est continue sur I avec $\ell\in I$ $\Rightarrow(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(\ell)$.

Théorème des gendarmes : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers ℓ et $u_n \le v_n \le w_n \Rightarrow (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
Théorème du point fixe : $u_{n+1} = f(u_n)$, f est continue sur I et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ avec $\ell \in I \Rightarrow \ell$ vérifie $f(\ell) = \ell$.
Suite adjacente : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes $\Leftrightarrow$ l'une est croissante, l'autre décroissante et $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n - v_n) = 0$.

Raisonnement par récurrence : énoncé de la propriété $P(n) \to$ initialisation ($P(0)$ vraie) $\to$ hérédité ($P(m)$ vraie $\Rightarrow P(m+1)$ vraie) $\to$ conclusion.

Intégration

Définition : $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire de la surface délimitée par la courbe de f et les trois droites : $x = a$, $x = b$ et $y = 0$.

Primitive : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Valeur moyenne : $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

Relation de Chasles : $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$.

Linéarité : $\int_a^b (\lambda f(x) + g(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

Hiérarchie : $f(x) \le g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

Primitives : $\int f(x) =$ "une primitive de f" $= F(x)$: $\int 0 = a$, $\int 1 = x$, $\int x = \frac{x^2}{2}$, $\int cos(x) = \sin(x)$, $\int sin(x) = -\cos(x)$, $\int tan(x) = -\ln(|\cos(x)|)$, $\int e^x = e^x$, $\int \ln(x) = x\ln(x) - x$.

Primitives de composées : $\int af'(ax+b) = f(ax+b)$, $\int nu'u^{n-1} = u^n$, $\int \frac{u'}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u}$, $\int \frac{u'}{u} = \ln(|u|)$, $\int u'\sin(u) = \cos(u)$, $\int u'\cos(u) = \sin(u)$, $\int u'e^u = e^u$, $\int u'(x)f'(u(x)) = (f\circ u)(x)$.

Probabilités

Probabilité : Ω ensemble fini, $P : \Omega \to [0;1]$, $P(\Omega) = 1$, $A\cap B = \varnothing \Rightarrow P(A\cup B) = P(A) + P(B)$.
Propriétés : $P(A) \in [0,1]$, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, $P(\varnothing) = 0$, $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$.
Probabilité uniforme : Ω fini et équiprobabilité $\Rightarrow P$ probabilité uniforme : $P(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega}$.
Probabilité conditionnelle : $P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.
Formules des probabilités totales : $P(A) = P(A\cap B) + P(A\cap\overline{B})$, $P(A) = P_B(A)P(B) + P_{\overline{B}}(A)P(\overline{B})$.
Indépendance : A et B indépendants $\Leftrightarrow P(A\cap B) = P(A)P(B)$.
A et B indépendants $\Leftrightarrow \overline{A}$ et B indépendants $\Leftrightarrow A$ et $\overline{B}$ indépendants $\Leftrightarrow \overline{A}$ et $\overline{B}$ indépendants.

Variables aléatoires discrètes

Variable aléatoire (va) : $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
Va discrète : $p_i = P(X = x_i)$, $i \in \{1,\ldots,n\}$, $\sum\limits_{i=1}^n p_i = 1$.
Espérance : $E(X) = \sum\limits_{i=1}^n x_i p_i$. C'est la valeur moyenne de X.
Variance : $V(X) = E((X - E(X))^2) = \sum\limits_{i=1}^n p_i(x_i - E(X))^2$.
Propriété : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$, $E(X^2) = \sum\limits_{i=1}^n x_i^2 p_i$.
Écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$. Il mesure la dispersion des valeurs de X autour de $E(X)$ et de même unité que X.
Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$: X vaut 0 ou 1 ; c'est un codage échec/succès. $P(X = 0) = 1 - p$, $P(X = 1) = p$, $E(X) = p$, $V(X) = p(1-p)$.

Loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$: X = nombre de fois qu'un événement A se réalise en n expériences indépendantes avec $P(A) = p \Rightarrow X$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$: $p_k = P(X = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$, $k \in \{0,\ldots,n\}$, $E(X) = np$, $V(X) = np(1-p)$. On a $\mathcal{B}(1,p) = \mathcal{B}(p)$.

Variables aléatoires à densité

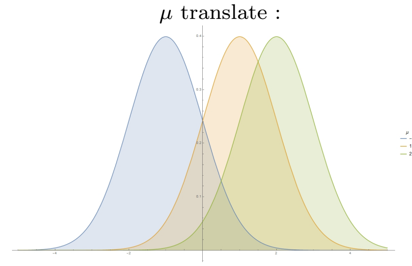
Densité sur $[a;b]$: f continue, positive et $\int_a^b f(x)dx = 1$.
Va à densité : X de densité $f \Leftrightarrow P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx$.
X modélise un caractère qui peut prendre une infinité de valeurs (en comptant les décimales) : poids, taille, durée de vie, temps d'attente...
Loi uniforme $\mathcal{U}([a;b])$: $f(x) = \frac{1}{b-a}$ si $x \in [a;b]$, 0 sinon. $[c;d] \subseteq [a;b]$, $P(c \le X \le d) = \frac{d-c}{b-a}$, $E(X) = \frac{a+b}{2}$, $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.
Loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ si $x \ge 0$, 0 sinon. $b > a \ge 0$, $P(a \le X \le b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$, $P(X \ge a) = e^{-\lambda a}$, $P(X \le b) = 1 - e^{-\lambda b}$, $E(X) = \frac{1}{\lambda}$, $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.
Loi normale $\mathcal{N}(0;1)$: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$, $E(X) = 0$, $V(X) = 1$, $P(a \le X \le b) = P(X \le b) - P(X \le a)$, $P(X \le -a) = 1 - P(X \le a)$, $\forall a > 0$, $P(|X| \le a) = P(-a \le X \le a) = 2P(X \le a) - 1$, $P(-1,96 \le X \le 1,96) = 0,95$.
Loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $x \in \mathbb{R}$, $E(X) = \mu$, $V(X) = \sigma^2$. X suit la loi $\mathcal{N}(\mu;\sigma) \Rightarrow U = \frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0;1)$.

Valeurs :

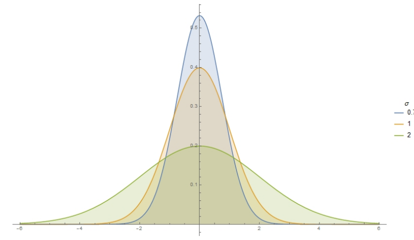
k	1	2	3
$P(\mu - k\sigma \le X \le \mu + k\sigma)$	0,68	0,95	0,99

Graphes de f : "forme de cloche",

μ translate :



σ dilate :



Intervalles de fluctuation et intervalle de confiance

Intervalle de fluctuation (IF) : n taille d'un échantillon, p fréquence théorique, f fréquence observée, $n \ge 30$, $np \ge 5$, $n(1-p) \ge 5 \Rightarrow$ IF pour f au niveau 95% est :
$IF = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$.
Intervalle de confiance (IC) : n taille d'un échantillon, p fréquence théorique, f fréquence observée, $n \ge 30$, $nf \ge 5$, $n(1-f) \ge 5 \Rightarrow$ IC pour p au niveau 95% est : $IC = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.
Amplitude de IC : $\frac{2}{\sqrt{n}}$.