TP n° 4 : Probabilités

Exercice 1. Représenter le graphe de la densité d'une *var* $X \sim \mathcal{B}(10, 0.23)$.

Exercice 2. Représenter le graphe de la densité d'une *var* $X \sim \chi^2(2)$ pour $x \in [0, 10]$.

Exercice 3. Soit $X \sim \mathcal{N}(11, 4)$.

1. Calculer les probabilités : $\mathbb{P}(16 \leq X \leq 19)$, $\mathbb{P}(X > 15)$, $\mathbb{P}(X < 5)$ et $\mathbb{P}(|X - 15| > 4.63)$.
2. Représenter le graphe de la fonction de répartition de X pour $x \in [4, 20]$.

Exercice 4. Soit X une *var* suivant la loi gamma $\Gamma(5, 1)$, *i.e.* de densité

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{24} x^4 e^{-x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Écrire une nouvelle fonction R équivalente à `dgamma`.
2. Vérifier numériquement que $\int_0^{100} f(x)dx \simeq 1$.
3. Évaluer la fonction de répartition de X pour $x \in \{2, \ldots, 10\}$.
4. Déterminer le réel x vérifiant $\mathbb{P}(X \leq x) = 0.89$.

Exercice 5.

1. Reproduire et comprendre les enjeux des commandes suivantes :

```
simu1 = function(p, k, l) {
vec = rbinom(k, 1, p)
plot(l:k, cumsum(vec)[l:k] / (l:k), type = "l", xlab = "i",
ylab = "frequences", ylim = c(0, 1))
abline(h = p)
}
simu1(0.2, 2000, 40)
```

2. Quel théorème célèbre illustrent les commandes précédentes ?
3. Reproduire et comprendre les enjeux des commandes suivantes :

```
simu2 = function(k, l) {
vec = rcauchy(k)
plot(l:k, cumsum(vec)[l:k] / (l:k), type = "l", xlab = "i",
ylab = "frequences")
}
simu2(10000, 15)
simu2(20000, 15)
simu2(30000, 15)
```

Est-ce que les graphiques obtenus contredisent le théorème évoqué précédemment ?

4. Reproduire et comprendre les enjeux des commandes suivantes :

```
simu3 = function(m, sigma, k, l) {
vec = rnorm(k, m, sigma)
s = numeric(k)
for (i in 1:k) {
s[i] = sd(vec[1:i])
}
plot(l:k, s[l:k], type = "l", xlab = "i", ylab = "écarts-type")
abline(h = sigma)
}
simu3(10, 2, 30000, 500)
```

Écrire le résultat général qui explique le graphique obtenu.

Exercice 6.

1. Énoncer le théorème central limite.

2. Reproduire et comprendre les enjeux des commandes suivantes :

```
tcl = function(n, k, lambda) {
mu = 1 / lambda
s = 1 / lambda
y = numeric(k)
for(i in 1:k) {
tirage = rexp(n, lambda)
y[i] = sqrt(n) * (mean(tirage) - mu) / s
}
hist(y, density = 20, prob = TRUE,
main = "Illustration du théorème central limite", xlab = "", ylab = "")
curve(dnorm(x), add = TRUE, col = "red", lwd = 3)
}
tcl(300, 10000, 3)
```

En quoi cela illustre-t-il le théorème central limite ?

3. Pour illustrer de nouveau ce théorème, reproduire et comprendre les enjeux des commandes suivantes :

   - d'une part :

     ```
     library(TeachingDemos)
     example(clt.examp)
     ```

   - d'autre part :

     ```
     library(distrTeach)
     example(illustrateCLT)
     ```