

Petite introduction à la notion de probabilité

Christophe Chesneau

<https://chesneau.users.lmno.cnrs.fr/>



Table des matières

1	Notion de probabilité	2
2	Approches personnelle et fréquentiste	3
3	Approche classique	4
4	Comparaison des approches par l'exemple	6
5	Pourcentage et proportion	7

~ Note ~

L'objectif de ce document est de présenter la notion de probabilité de manière pédagogique.

Contact : christophe.chesneau@gmail.com

Bonne lecture !

1 Notion de probabilité

Définition intuitive

Une probabilité est une valeur comprise entre 0 et 1 par laquelle on exprime les chances qu'un événement se réalise. En particulier,

- une probabilité proche de 0 signifie que l'événement a de faibles chances de se réaliser,
- une probabilité proche de 1 signifie que l'événement a de fortes chances de se réaliser,
- une probabilité de $\frac{1}{2}$ (ou 0,5) signifie que l'événement a une chance sur deux de se réaliser.

Exemple. La probabilité de gagner au Loto est proche de 0.

Exemple. La probabilité qu'un dé affiche au moins une fois 6 en 1000 lancers est proche de 1.

Exemple. La probabilité qu'une pièce de monnaie affiche Face après un lancer est $\frac{1}{2}$.

Calcul direct

La probabilité qu'un événement se réalise peut se calculer de manière intuitive et directe.

Si un événement a k chances sur n de se réaliser, alors la probabilité qu'il se réalise est $\frac{k}{n}$.

Exemple. Une urne contient 16 boules dont 7 sont blanches et 9 sont noires. On tire une boule au hasard. On cherche à calculer la probabilité que cette boule soit noire. Comme il y a 9 chances sur 16 de tirer une boule noire, la probabilité recherchée est $\frac{9}{16} = 0,5625$.

Trois approches

En plus du calcul direct, on distingue trois approches pour déterminer des probabilités. Il y a

- l'approche personnelle,
- l'approche fréquentiste,
- l'approche classique.

2 Approches personnelle et fréquentiste

Approche personnelle

Chacun peut donner une probabilité qui reflète son opinion sur les chances de réalisation d'un événement. Ainsi, cette probabilité repose sur des croyances et expériences personnelles. On parle de probabilité personnelle.

Exemple. Monsieur Convenant, fin connaisseur sportif, affirme que l'équipe de France a 4 chances sur 100 de remporter 15 médailles d'or au prochain Jeux Olympiques. Ainsi, la probabilité que cet événement se réalise est

$$\frac{4}{100} = 0,04.$$

Les fondements de cette probabilité reposant sur une impression personnelle, c'est une probabilité personnelle.

Approche fréquentiste

Les méthodes statistiques et les données d'expérimentation permettent aussi de calculer (ou d'estimer) des probabilités. On parle d'approche fréquentiste.

Si, en n expériences, un événement se réalise exactement k fois, alors la probabilité que l'événement se réalise est $\frac{k}{n}$. C'est une probabilité fréquentiste.

Exemple. Une production normande fabrique et conditionne des plaquettes de beurre. Dans une expérimentation antérieure, sur 5000 plaquettes examinées, 20 ont présenté un défaut de conditionnement. Le fabricant se pose la question suivante : quelle est la probabilité qu'une plaquette de beurre tirée au hasard dans la production ait un défaut de conditionnement ? Étant donné l'expérimentation antérieure, il est naturel de répondre

$$\frac{20}{5000} = 0,004.$$

C'est une probabilité fréquentiste.

3 Approche classique

Approche classique et modélisation

L'approche personnelle et l'approche fréquentiste donnent des probabilités approchées. Parfois, en prenant en compte les informations liées à un événement, on est en mesure de calculer sa probabilité de façon exacte. Tel est l'enjeu de l'approche classique. Pour bien l'appréhender il est coutume de mettre en place un vocabulaire et un cadre mathématique adaptés. Ceux-ci visent à modéliser le problème.

Expérience aléatoire

Une expérience aléatoire est une expérimentation ou un phénomène dont on connaît parfaitement les conditions mais dont on ne peut pas prévoir l'issue. On la note $\mathcal{E}$.

Événement

On appelle événement une partie de l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire. On le note A .

Événement "se réalise"

On dit qu'un événement A se réalise lors d'une expérience aléatoire si et seulement si l'issue de cette expérience aléatoire appartient à A .

Événement élémentaire

L'événement est dit élémentaire s'il ne correspond qu'à une seule et unique issue.

Équiprobabilité

Si aucun événement élémentaire n'a plus de chance de se réaliser que les autres, on dit qu'il y a équiprobabilité.

Approche classique

Soit $\mathcal{E}$ une expérience aléatoire et A un événement qui peut se réaliser lors de cette expérience. Soit n le nombre des issues possibles de $\mathcal{E}$ et n_A le nombre d'issues réalisant A . Alors, si n est fini et s'il y a équiprobabilité, la probabilité que A se réalise est le réel :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n_A}{n}.$$

C'est une probabilité classique. $\mathbb{P}(A)$ se prononce "P de A".

Exemple. On lance un dé cubique honnête. On cherche à calculer la probabilité qu'il affiche un numéro impair strictement inférieur à 5. Notre expérience aléatoire est $\mathcal{E}$: "lancer un dé". Les issues possibles sont 1, 2, 3, 4, 5 et 6, donc $n = 6$. Ces 6 numéros ont les mêmes chances d'apparaître, il y a équiprobabilité. L'événement $A =$ "on obtient un nombre impair strictement inférieur à 5" se réalise quand le numéro 1 ou 3 est affiché. Donc $A = \{1, 3\}$ et $n_A = 2$. Par conséquent, la probabilité recherchée est

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Dans de nombreuses situations, les calculs de n et n_A ne sont pas immédiats. Il faut parfois avoir recours à des techniques de dénombrement.

4 Comparaison des approches par l'exemple

Un homme et une femme ont chacun des gènes à l'origine des yeux verts et des yeux marrons. On cherche à déterminer la probabilité que leur enfant ait des yeux marrons. Pour ce faire, nous distinguons les trois approches présentées précédemment.

- **Approche personnelle.** Une personne interrogée au hasard peut répondre 0,5, soit une chance sur deux. C'est une probabilité personnelle.
- **Approche fréquentiste.** Un statisticien peut, par exemple, chercher 150 couples génétiquement semblables au notre et compter le nombre d'entre eux ayant des enfants aux yeux marrons. S'il en dénombre 107, il en conclura que la probabilité recherchée est

$$\frac{107}{150} = 0,7133333.$$

C'est une probabilité fréquentiste.

- **Approche classique.** On symbolise les gènes à l'origine des yeux verts par V et les gènes à l'origine des yeux marrons par M . Notre expérience aléatoire est $\mathcal{E}$: "déterminer la combinaison génétique à l'origine de la couleur des yeux d'un enfant dont le père possède M et V , et la mère possède M et V ". En distinguant le père et la mère, l'enfant peut avoir l'une des combinaisons suivantes : (V, V) , (V, M) , (M, V) , (M, M) , donc $n = 4$. Ces 4 combinaisons ont les mêmes chances d'apparaître, il y a équiprobabilité. **Par ailleurs, on dispose de l'information que M domine V ; les gènes à l'origine des yeux verts sont récessifs.** Par conséquent, l'événement $A =$ "l'enfant a les yeux marrons" se réalise quand l'enfant possède une des combinaisons : (V, M) , (M, V) , (M, M) . Donc $A = \{(V, M), (M, V), (M, M)\}$ et $n_A = 3$. Ainsi, la probabilité recherchée est

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{3}{4} = 0,75.$$

C'est une probabilité classique.

5 Pourcentage et proportion

Pourcentage

Un pourcentage est une probabilité. Suivant le contexte, celle-ci peut être personnelle, fréquentiste ou classique. Si un événement a $k\%$ de chances de se réaliser, alors la probabilité que l'événement se réalise est $\frac{k}{100}$.

Exemple. Dire que 50,3% des êtres humains sont des hommes signifie que si l'on choisit une personne au hasard, la probabilité que ce soit un homme est

$$\frac{50,3}{100} = 0,503.$$

Probabilité

Une proportion est une probabilité.

Exemple. Une urne contient un certain nombre de boules colorées. On sait que la proportion de boules bleues est 0,24. Par conséquent, la probabilité qu'une boule tirée au hasard dans l'urne soit bleue est 0,24.