TD n° 1 : Variables aléatoires réelles (*var*)

Exercice 1. Soit X une *var* telle que $X(\Omega) \subseteq \mathbb{N}$. Pour tout $p \in \mathbb{N} - \{0, 1, 2\}$ et $j \in \{1, \ldots, p-1\}$, on appelle j-ème fractile d'ordre p de X l'entier m_j tel que $\mathbb{P}(X \leq m_j) \geq \frac{j}{p}$ et $\mathbb{P}(X \geq m_j) \geq 1 - \frac{j}{p}$. On suppose qu'il existe un indice $j_* \in \{1, \ldots, p-2\}$ tel que $m_{j_*+1} < m_{j_*}$. Montrer que $\mathbb{P}(m_{j_*+1} < X < m_{j_*}) = 1 - (\mathbb{P}(X \leq m_{j_*+1}) + \mathbb{P}(X \geq m_{j_*})) \leq -\frac{1}{p}$, puis conclure.

Exercice 2. Soient $\lambda > 0$ et X une *var* suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. On pose $Y = \mathbf{1}_{\{X=0\}} + \mathbf{1}_{\{X=1\}}$. Déterminer la loi de Y, puis calculer $\mathbb{E}(2Y + 1)$ et $\mathbb{V}(2Y + 1)$.

Exercice 3. Soit X une *var* dont la loi est donnée par $\mathbb{P}(X = k) = \frac{90}{\pi^4 k^4}$, $k \in \mathbb{N}^*$. On pose $Y = 4\left[\frac{X}{2}\right] - 2X + 1$. Déterminer la loi de Y, puis calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$.

Exercice 4. Soit X une *var* telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$. On pose, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $x_i = \mathbb{P}_{\{X \geq i\}}(X = i)$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X \geq k) = \prod_{i=0}^{k-1}(1 - x_i)$, (avec la convention $\prod_{i=0}^{-1}(1 - x_i) = 1$), puis exprimer la loi de X en fonction de $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

Exercice 5. Soient $n \in \mathbb{N} - \{0, 1, 2\}$, $p \in]0, 1[$ et X une *var* suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. En utilisant la fonction génératrice de X, calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X(X - 1))$, $\mathbb{E}(X(X - 1)(X - 2))$ et $\mathbb{E}\left((-1)^X\right)$.

Exercice 6. Soient $p \in]0, 1[$ et X une *var* suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Calculer $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right)$.

Exercice 7. Soit X une *var* dont la loi est donnée par $\mathbb{P}(X = k) = \frac{3k^2 + 3k + 1}{(k(k + 1))^3}$, $k \in \mathbb{N}^*$. On pose $\zeta_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ et $\zeta_3 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$. Calculer $\mathbb{E}(X)$ en fonction de ζ_3, puis calculer $\mathbb{V}(X)$ en fonction de ζ_2 et ζ_3.

Exercice 8. Soient $p \in]0, 1[$ et X une *var* suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Déterminer la fonction caractéristique de X, puis déterminer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(\cos(tX))$.

Exercice 9. Soit X une *var* admettant un moment d'ordre 1 telle que $X(\Omega) \subseteq \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > k)$.

Exercice 10. Soient $\lambda > 0$ et X une *var* suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. On pose $Y = e^{-X}$. Déterminer une densité de Y de deux manières : d'une part, en utilisant les fonctions de répartition, et d'autre part, en utilisant la méthode de la fonction muette.

Exercice 11. Soient $\lambda > 0$ et X une *var* suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$. Calculer $\mathbb{P}(\sin(X) > 0)$.

Exercice 12. Soient $\lambda > 0$ et X une *var* suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. On pose $Y = [X]$. Déterminer la loi de Y, puis calculer $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 13. Soit X une *var* de densité $f(x) = \sqrt{\frac{\ln(3)}{2\pi}} 3^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$. On pose $Y = 2X - 1$. Reconnaître une loi usuelle pour X, puis déterminer la loi de Y.

Exercice 14. Soit X une *var* suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On pose $Y = |X| + 1$. Déterminer une densité de Y, puis calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$.

Exercice 15. Soit X une *var* suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Calculer, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}\left(e^{-aX}\right)$.

Exercice 16. Soit X une *var* suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sup_{t\in\mathbb{R}} \mathbb{P}(|t + X| \leq x) = \mathbb{P}(|X| \leq x)$.

Exercice 17. Soit X une *var* de densité $xe^{-\frac{x^2}{2}}\mathbf{1}_{[0,\infty[}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right)$.

Exercice 18. Soit X une *var* suivant la loi de Cauchy $\mathcal{C}(0,1)$, *i.e.* de densité $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$. On pose $Y = \sup(X, 0)$. Déterminer la fonction de répartition de Y. Est-ce que Y est une *var* à densité ?

Exercice 19. Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et X une *var* suivant la loi Logistique$(\theta, 1)$, *i.e.* de densité $f(x) = \frac{e^{-(x-\theta)}}{\left(1+e^{-(x-\theta)}\right)^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $X - \theta$ et $\theta - X$ suivent la même loi, puis en déduire $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 20. Soit $p \in]0,1[$. Le temps de congélation en heures d'un produit peut être modélisé par une *var* X de densité $f(x) = \frac{p}{(1-(1-p)x)^2}\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. On pose $Y = 1-(1-p)X$. Calculer $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{E}(Y^2)$ et $\mathbb{V}(Y)$, puis calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Exercice 21. Soit X une *var* suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$. On pose $Y = \sup(X, 1-X)$. Déterminer la fonction de répartition de Y, puis une densité de Y.

Exercice 22. Soient $\lambda > 0$ et X une *var* suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(X^n)$ de deux manières : d'une part, directement, et d'autre part, avec la transformée de Laplace de X.

Exercice 23. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $b > a$ et X une *var* suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$. On pose $Y = a + (b-a)X$. Déterminer la loi de Y de deux manières : d'une part, avec les fonctions de répartition, et d'autre part, avec les fonctions caractéristiques.

Exercice 24. Soient $\lambda > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ et X une *var* suivant la loi gamma $\Gamma(n, \lambda)$, *i.e.* de densité $f(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{[0,\infty[}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Déterminer la fonction caractéristique de X.

Exercice 25. Soient X une *var* suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et φ sa fonction caractéristique. Montrer que l'on peut écrire $\varphi(t) = \mathbb{E}\left(\cos(tX)\right)$, $t \in \mathbb{R}$, puis que $\varphi(t)$ est solution de l'équation différentielle : $y'(t) + ty(t) = 0$, et en déduire l'expression de $\varphi(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 26. Soit X une *var* suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On pose $Y = 3X - 2$. Déterminer la fonction caractéristique de Y de deux manières : d'une part, en utilisant la loi de Y, et d'autre part, en utilisant la fonction caractéristique de X.

Exercice 27. Soit X une *var* suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([-1,1])$. On pose $Y = \frac{1}{X}$. Soit φ_Y la fonction caractéristique de Y. En admettant que $\int_0^\infty \frac{1-\cos(x)}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}$, montrer que, au voisinage de $t = 0$, on a $\varphi_Y(t) \sim 1 - \frac{\pi}{2}|t|$.