TD n° 2 : Vecteurs de *var*

Exercice 1. Soient $p \in]0,1[$, X une *var* suivant la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, Y une *var* telle que $Y(\Omega) = \mathbb{N}$, et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}_{\{X=0\}}(Y = k) = (1-p)^k p$, $\mathbb{P}_{\{X=1\}}(Y = k) = p^k(1-p)$. Déterminer la loi de Y. Pour quelle valeur de p les *var* X et Y sont indépendantes ?

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Deux joueurs utilisent un dé à n faces numérotées de 1 à n. La règle du jeu est la suivante. Le joueur A commence par verser 3 euros au joueur B, puis il lance le dé. Le numéro affiché devient alors le numéro de référence. Puis le joueur B lance le dé jusqu'à ce qu'il obtienne un numéro supérieur au numéro de référence. Le jeu s'arrête alors. Avant chaque lancer, le joueur B verse 1 euros au joueur A. Soient X la *var* égale au numéro référence et Y la *var* égale au montant total en euros versé par le joueur B au joueur A. Calculer, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$ et tout $j \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}_{\{X=k\}}(Y = j)$, puis, en utilisant la formule : $\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y > k)$, calculer $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 3. Soient $p \in]0,1[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \ldots, X_n$ n *var iid* suivant chacune la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $T_n = \dfrac{S_n(S_n - 1)}{n(n-1)}$. Donner la loi de S_n, puis calculer $\mathbb{E}(T_n)$.

Exercice 4. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ n réels positifs et, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, X_k une *var* suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\alpha_k)$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Déterminer la loi de S_n.

Exercice 5. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0,1[$ et $X_1, \ldots, X_n$ n *var iid*. La loi de X_1 est donnée par $\mathbb{P}(X_1 = -1) = (1-p)^2$, $\mathbb{P}(X_1 = 0) = 2p(1-p)$, $\mathbb{P}(X_1 = 1) = p^2$. On pose $Y_n = \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1 + X_k}{2}$. Calculer $\mathbb{E}((Y_n - p)^2)$.

Exercice 6. Soient X et Y deux *var iid* de densité commune $f(x) = \sqrt{\dfrac{\ln(3)}{2\pi}} 3^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$. Reconnaître une loi usuelle pour X, puis donner la loi de $3X - Y + 2$.

Exercice 7. Soient X et Y deux *var iid* de densité commune $f(x) = \dfrac{1}{2} e^{\sqrt{x}} \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. On pose $Z = \sqrt{X} + \sqrt{Y}$. Montrer qu'une densité de Z est donnée par
$$f_Z(x) = \frac{x^3}{6} e^x \mathbf{1}_{[0,1]}(x) + \left(x - \frac{2}{3} - \frac{x^3}{6} \right) e^x \mathbf{1}_{]1,2]}(x), \; x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 8. Soient $a > 0$, et X_1, X_2 et X_3 trois *var iid* suivant chacune la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On pose $Z = X_1 \mathbf{1}_{\{|X_2| \geq a\}} - X_3 \mathbf{1}_{\{|X_2| < a\}}$.

1. Montrer que Z suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.
2. Calculer $\mathbb{C}(X_3, Z)$. Est-ce que X_3 et Z sont indépendantes ?
3. On pose $W = X_3 + Z$. Exprimer $\mathbb{P}(W = 0)$ en fonction de la fonction de répartition de X_2. Est-ce que W suit une loi normale ?

Exercice 9. Soient X et Y deux *var iid* admettant un moment d'ordre 2. On pose $U = 2018 - X + 3XY^2$ et $V = 2 + X$. Montrer que $\mathbb{C}(U, V) = \mathbb{V}(X)(3\mathbb{E}(X^2) - 1)$.

Exercice 10. Soient X et Y deux *var iid* suivant chacune la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$. On pose $U = X + Y$, $V = \dfrac{X}{X+Y}$ et $W = \dfrac{X}{Y}$.

1. Déterminer une densité de (U, V). Est-ce que U et V sont indépendantes ?
2. Déterminer une densité de (U, W). Est-ce que U et W sont indépendantes ?

Exercice 11. Soient X et Y deux *var iid* suivant chacune la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$. On pose $U = \inf(X, Y)$, $V = \sup(X, Y)$ et $W = V - U$.

1. Montrer que U et V ne sont pas indépendantes.
2. Déterminer une densité de (U, W). Est-ce que U et W sont indépendantes ?

Exercice 12. Soient $\lambda > 0$, $p \in]0, 1[$, X une *var* suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ et N une *var* suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, avec X indépendante de N. Déterminer une densité de $\dfrac{X}{N}$.

Exercice 13. Soient X et Y deux *var iid* suivant chacune la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. On admet le résultat suivant. *Soient R une var suivant la loi de Rayleigh, i.e. de densité $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}\mathbf{1}_{[0,\infty[}(x)$, et Θ une var suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([0, 2\pi])$, avec R et Θ indépendantes. Alors $R\cos(\Theta)$ et $R\sin(\Theta)$ sont iid et suivent chacune la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.*

1. Montrer que $\sqrt{X^2 + Y^2}$ suit la loi de Rayleigh.
2. *Question préliminaire.* Soit Θ une *var* suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([0, 2\pi])$. Montrer, à l'aide de la méthode de la fonction muette, que $\cos(\Theta)$ et $\cos(2\Theta)$ suivent la même loi.
3. En utilisant les résultats précédents, déterminer la loi de $\dfrac{X^2 - Y^2}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$, puis celle de $\dfrac{XY}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$.

Exercice 14. En utilisant les fonctions caractéristiques, montrer qu'il ne peut pas exister 2 *var* X et Y *iid* telles que $X - Y$ suivent la loi uniforme $\mathcal{U}([-1, 1])$.

Exercice 15. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $X_1, \ldots, X_{2n}$ $2n$ *var* indépendantes telles que, pour tout $k \in \{1, \ldots, 2n\}$, X_k suit la loi normale $\mathcal{N}\left(k, \dfrac{1}{k}\right)$. Déterminer la loi de $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k X_k$.

Exercice 16. Soient $\lambda > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, et $X_1, \ldots, X_n$ n *var iid* suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ suit la loi Gamma $\Gamma(n, \lambda)$, *i.e.* de densité $f(x) = \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{[0,\infty[}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, de deux manières : d'une part, en utilisant le produit de convolution, et d'autre part, en utilisant les fonctions caractéristiques.

Exercice 17. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \ldots, X_n$ n *var iid* suivant chacune la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$. On pose $Y_n = \inf(X_1, \ldots, X_n)$. Calculer, pour tout $r > 0$, $\mathbb{E}(Y_n^r)$.

Exercice 18. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $X_1, \ldots, X_n$ n *var iid* et $X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}$ les *var* ordonnées : pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $X_{(k)} \in \{X_1, \ldots, X_n\}$ avec $X_{(1)} \leq \ldots \leq X_{(n)}$ (donc $X_{(1)} = \inf(X_1, \ldots, X_n), \ldots$). Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, déterminer la fonction de répartition de $X_{(k)}$.

Exercice 19. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \ldots, X_n$ n *var* centrées *iid* admettant un moment d'ordre 2. On pose, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $S_k = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} X_j$ et $T_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} S_k$. Calculer $\mathbb{V}(T_n)$.