TD n° 4 : Convergence en probabilité

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* suivant chacune la loi de poisson $\mathcal{P}(1)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$. Étudier la convergence en probabilité de $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit X_n une *var* suivant la loi de Bernoulli $\mathcal{B}\left(\frac{n}{1+2n}\right)$. Est-ce que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers 0 ?

Exercice 3. Soit X une *var* suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = e^{-X+\frac{1}{n}}$. Montrer que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers e^{-X}.

Exercice 4. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* suivant chacune la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$. Montrer que $\left(\frac{X_n}{\ln(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}-\{0,1\}}$ converge en probabilité vers 0.

Exercice 5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit X_n une *var* de densité $f_{X_n}(x) = nxe^{-n\frac{x^2}{2}}\mathbf{1}_{[0,\infty[}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers 0.

Exercice 6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit X_n une *var* de densité $f_{X_n}(x) = \frac{ne^{-nx}}{(1+e^{-nx})^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers 0.

Exercice 7. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* suivant chacune la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|X_k|$. Étudier la convergence en probabilité de $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 8. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* suivant chacune la loi uniforme $\mathcal{U}\left(\left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}\right)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n}\cos(X_k)$. Étudier la convergence en probabilité de $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 9. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* suivant chacune la loi uniforme $\mathcal{U}([0,3])$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \left(\prod_{k=1}^{n} X_k\right)^{\frac{1}{n}}$. Montrer que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $3e^{-1}$.

Exercice 10. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* admettant un moment d'ordre 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k X_k$. Étudier la convergence en probabilité de $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 11. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* suivant chacune la loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \inf(X_1, \ldots, X_n)$. Montrer que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers 0.

Exercice 12. Soient $a > 0$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* de densité commune $f(x) = e^{-(x-a)}\mathbf{1}_{[a,\infty[}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \inf(X_1, \ldots, X_n)$. Montrer que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers a.

Exercice 13. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* suivant chacune la loi de Cauchy $\mathcal{C}(0,1)$, *i.e.* de densité : $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \frac{1}{n^2}\sup(X_1, \ldots, X_n)$. Montrer que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers 0.

Exercice 14. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}-\{0,1,2\}}$ une suite de *var* indépendantes telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}-\{0,1,2\}$, la loi de X_n est donnée par $\mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{2n\ln(n)}$, $\mathbb{P}(X_n = -n) = \frac{1}{2n\ln(n)}$, $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n\ln(n)}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}-\{0,1,2\}$, on pose $S_n = \sum_{k=3}^{n} X_k$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}-\{0,1,2\}$, on a $\mathbb{V}(S_n) \leq \frac{n^2}{\ln(n)}$, puis étudier la convergence en probabilité de $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}-\{0,1,2\}}$.

Exercice 15. Soient $\alpha \in]0,1]$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var* indépendantes telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(n^{-\alpha})$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Montrer que $\left(\frac{S_n}{\mathbb{E}(S_n)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers 1.

Exercice 16. Soient $p \in]0,1[$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* suivant chacune la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = \sum_{k=1}^{n} X_k X_{k+1}$. Montrer que $\left(\frac{T_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers p^2.

Exercice 17. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* admettant un moment d'ordre 2 telle qu'il existe un réel m tel que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n) = m$, et de plus, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{V}(X_n) = 0$. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers m.

Exercice 18. Soient $\alpha > \frac{3}{2}$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* centrées admettant un moment d'ordre 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$ et $Y_n = \frac{1}{n^\alpha}\sum_{k=1}^{n} S_k$. Montrer $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers 0.

Exercice 19. Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var* et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels telles qu'il existe un réel ℓ vérifiant $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$, et de plus, pour tout $\alpha > 0$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - u_n| \geq \alpha) = 0$. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers ℓ.

Exercice 20. Soient $\alpha < \frac{1}{2}$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* admettant un moment d'ordre 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $Y_n = n^\alpha \left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(X_1)\right|$. Montrer $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers 0.

Exercice 21. Soient $c \in \mathbb{R}$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var*. On suppose que, pour toute fonction f continue et bornée sur $\mathbb{R}$, on a $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(f(X_n)) = f(c)$. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers c.

Exercice 22. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var* suivant la même loi et admettant un moment d'ordre 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sup(|X_1|,\ldots,|X_n|)$. Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, on a $\mathbb{P}(Y_n \geq \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^2}\mathbb{E}\left(X_1^2 \mathbf{1}_{\{X_1^2 > n\epsilon^2\}}\right)$, puis étudier la convergence en probabilité de $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.