TD n° 5 : Convergence presque sûre

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var*. Est-ce que la convergence presque sûre de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers une *var* X entraîne toujours la convergence en probabilité de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers X ?

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid*. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on considère la *var* Y_n égale au nombre d'indices $i\in\{1,\ldots,n\}$ pour lesquels l'événement $\{X_{2i}\leq X_{2i+1}\}$ se réalise. Étudier la convergence presque sûre de $\left(\frac{Y_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* suivant chacune la loi uniforme $\mathcal{U}\left(\left\{0,\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\pi,\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right\}\right)$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $S_n=\sum_{k=1}^{n}\cos(X_k)$. Étudier la convergence presque sûre de $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 4. Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var* convergeant presque sûrement vers une *var* X et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que $(f(X_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers $f(X)$.

Exercice 5. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* telle que $\mathbb{E}(X_1)=-1$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$. Étudier la convergence presque sure de $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\left(\frac{S_n}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, puis calculer $\mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\mathbf{1}_{\{S_j\geq 0\}}=\infty\right)$.

Exercice 6. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* admettant un moment d'ordre 2. Étudier la convergence presque sûre de $\left(\frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=k+1}^{n}X_kX_j\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 7. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* admettant un moment d'ordre 2. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $Y_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$ et $Z_n=\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k-Y_n)^2$. Calculer $\mathbb{E}(Z_n)$, puis étudier la convergence presque sure de $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 8. Soient $\alpha>0$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* suivant chacune la loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $Y_n=\left(\prod_{k=1}^{n}X_k\right)^{\frac{\alpha}{n}}$. Étudier la convergence presque sûre de $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 9. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, soit X_n une *var* de densité $f_{X_n}(x)=n^2xe^{-\frac{n^2x^2}{2}}\mathbf{1}_{[0,\infty[}(x)$, $x\in\mathbb{R}$. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers 0.

Exercice 10. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, soit X_n une *var* telle que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, X_n suit la loi normale $\mathcal{N}\left(0,\frac{1}{n}\right)$. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers 0. *On pourra utiliser le résultat: si Z est une var suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ alors, pour tout $x\geq 0$, on a $\mathbb{P}(Z\geq x)\leq e^{-\frac{x^2}{2}}$.*

Exercice 11. Soient $\lambda>0$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* suivant chacune la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $Y_n=\inf(X_1,\ldots,X_n)$. Montrer que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers 0.

Exercice 12. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var* indépendantes telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi normale $\mathcal{N}\left(1, \frac{1}{n}\right)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} kX_k$. Montrer que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers $\frac{1}{2}$.

Exercice 13. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var* indépendantes. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k X_k$. Étudier la convergence presque sure de $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ lorsque les *var* de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suivent la même loi avec $\mathbb{E}(X_1) = -1$, puis lorsque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \sim \mathcal{N}\left(n, \frac{1}{n}\right)$.

Exercice 14. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* suivant chacune la loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$. Étudier la convergence presque sûre de $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 15. Soient $\alpha > 0$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}-\{0,1\}}$ une suite de *var iid* suivant chacune la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$. Montrer que $\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\ln(n)} \geq 1$ presque sûrement. Est-ce que $\left(\frac{X_n}{\ln(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}-\{0,1\}}$ converge presque sûrement ?

Exercice 16. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}-\{0,1,2\}}$ une suite de *var* indépendantes telle que, pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0, 1, 2\}$, la loi de X_n est donnée par $\mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{2n\ln(n)}$, $\mathbb{P}(X_n = -n) = \frac{1}{2n\ln(n)}$, $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n\ln(n)}$. Pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0, 1, 2\}$, on pose $S_n = \sum_{k=3}^{n} X_k$. Montrer que $\limsup_{n\to\infty} \frac{|X_n|}{n} \geq 1$ presque sûrement. Est-ce que $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}-\{0,1,2\}}$ converge presque sûrement ?

Exercice 17. Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* suivant chacune la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que la série $\sum_{j=0}^{\infty} a_j^2$ converge. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \sum_{k=1}^{n} a_{n-k} X_k$. Montrer que, presque sûrement, on a $\limsup_{n\to\infty} \frac{Y_n}{\sqrt{\ln(n)}} \leq \sqrt{2 \sum_{j=0}^{\infty} a_j^2}$. *On pourra utiliser le résultat: si Z est une var suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ alors, pour tout $x \geq 0$, on a $\mathbb{P}(Z \geq x) \leq e^{-\frac{x^2}{2}}$.*

Exercice 18. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var* telle que la série $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(|X_k|\mathbf{1}_{\{|X_k|\geq 1\}}\right)$ converge. Montrer que la série $\sum_{k=1}^{\infty} |X_k|\mathbf{1}_{\{|X_k|\geq 1\}}$ converge presque sûrement.

Exercice 19. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var* indépendantes telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une densité de X_n est $f_{X_n}(x) = \frac{1}{2} n e^{-n|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. On pose $Y_n = \inf(|X_1|, \ldots, |X_n|)$. Montrer que la série $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(Y_k > k^{-\frac{3}{2}}\right)$ converge, puis étudier la convergence presque sûre de la série $\sum_{k=1}^{\infty} Y_k$.