TD n° 6 : Convergence dans $\mathbb{L}^p$

Exercice 1. Soient $p \geq 1$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var*. Est-ce que la convergence dans $\mathbb{L}^p$ de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers une *var* X entraîne toujours la convergence en probabilité de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers X ?

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var* telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de X_n est donnée par $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$, $\mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n}$. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en probabilité vers 0, puis que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas dans $\mathbb{L}^1$.

Exercice 3. Soient $p \geq 1$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var* convergeant dans $\mathbb{L}^p$ vers une *var* X, et f une fonction de dérivée bornée sur $\mathbb{R}$. Montrer que $(f(X_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathbb{L}^p$ vers $f(X)$.

Exercice 4. Soient $q \geq 1$, $p \geq q$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var* convergeant dans $\mathbb{L}^p$ vers une *var* X. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathbb{L}^q$ vers X.

Exercice 5. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* admettant un moment d'ordre 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Montrer que $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathbb{L}^2$ vers $\mathbb{E}(X_1)$.

Exercice 6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit X_n une *var* suivant la loi de Bernoulli $\mathcal{B}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$. Étudier la convergence dans $\mathbb{L}^1$ de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 7. Soit X une *var* suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = e^{-X+\frac{1}{n}}$. Étudier la convergence dans $\mathbb{L}^2$ de $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 8. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* suivant chacune la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$. Montrer que $\left(\frac{X_n}{\ln(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}-\{0,1\}}$ converge dans $\mathbb{L}^p$ pour tout $p \geq 1$.

Exercice 9. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* admettant un moment d'ordre 2 telle qu'il existe un réel m tel que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n) = m$, et de plus, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{V}(X_n) = 0$. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathbb{L}^2$ vers m.

Exercice 10. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var* convergeant dans $\mathbb{L}^2$ vers une *var* X. Montrer que $(X_n^2)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathbb{L}^1$ vers X^2.

Exercice 11. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* suivant chacune la loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$. Montrer que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers 0, puis que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas dans $\mathbb{L}^1$.

Exercice 12. Soient $\lambda > 0$, $\alpha \in \left]0, \frac{1}{\sqrt{\lambda+\lambda^2}}\right[$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* suivant chacune la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \alpha^n \prod_{k=1}^{n} X_k$. Montrer que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathbb{L}^2$ vers 0.

Exercice 13. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* centrées telles que $\mathbb{E}(X_1^2) < 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \prod_{j=1}^{n} X_j$ et $Z_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k$. Montrer que $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathbb{L}^2$ vers 0.

Exercice 14. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* admettant un moment d'ordre 2 telle que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n) = \infty$ et la suite de réels $\left(\frac{\mathbb{V}(X_n)}{\mathbb{E}(X_n)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée. Montrer que $\left(\frac{X_n}{\mathbb{E}(X_n)}\right)_{n\in\mathbb{N}-\{0,1\}}$ converge dans $\mathbb{L}^2$ vers 1.

Exercice 15. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}-\{0,1,2\}}$ une suite de *var* indépendantes telle que, pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0,1,2\}$, la loi de X_n est donnée par $\mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{2n\ln(n)}$, $\mathbb{P}(X_n = -n) = \frac{1}{2n\ln(n)}$, $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n\ln(n)}$. Pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0,1,2\}$, on pose $S_n = \sum_{k=3}^{n} X_k$. Montrer que $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}-\{0,1,2\}}$ converge dans $\mathbb{L}^2$ vers 0.

Exercice 16. Soient $\alpha > \frac{3}{2}$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* centrées admettant un moment d'ordre 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$ et $Y_n = \frac{1}{n^\alpha}\sum_{k=1}^{n} S_k$. Montrer $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathbb{L}^2$ vers 0.

Exercice 17. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var* telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de X_n est donnée par $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}$, $\mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n^2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas dans $\mathbb{L}^1$.

Exercice 18. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* suivant chacune la loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \inf(X_1, \ldots, X_n)$. Montrer que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathbb{L}^2$ vers 0.

Exercice 19. Soient $\theta > 0$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* suivant chacune la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $Y_n = (1+\theta)^n e^{-\theta S_n}$. Montrer que, pour tout $r > 0$, $(Y_n^r)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers 0, puis que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas dans $\mathbb{L}^1$, puis que $\left(\sqrt{Y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathbb{L}^1$ vers 0.

Exercice 20. Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* suivant chacune la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que la série $\sum_{j=0}^{\infty} a_j^2$ converge et, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $a_j a_{j+1} = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \sum_{k=1}^{n} a_{n-k} X_k$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Y_n et Y_{n+1} sont indépendantes, puis calculer $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left((Y_n - Y_{n+1})^2\right)$. Est-ce que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathbb{L}^2$?

Exercice 21. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* admettant un moment d'ordre 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{k}$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1$, puis que $\left(\frac{Y_n}{\ln(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}-\{0,1\}}$ converge dans $\mathbb{L}^2$ vers $\mathbb{E}(X_1)$.