TD n° 7 : Convergence en loi

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de *var* telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de X_n est donnée par $\mathbb{P}\left(X_n = 1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}\left(X_n = 1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$. Étudier la convergence en loi de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de *var* telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}\left(\frac{1}{n}\right)$. Étudier la convergence en loi de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de *var* telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi uniforme $\mathcal{U}\left(\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}\right)$. Étudier la convergence en loi de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 4. Soient $\lambda > 0$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de *var* telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi géométrique $\mathcal{G}\left(\frac{\lambda}{n}\right)$. Étudier la convergence en loi de $\left(\frac{X_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit X_n une *var* de fonction de répartition $F_{X_n}(x) = \frac{1 - e^{-\frac{x}{n}}}{1 - e^{-\frac{1}{n}}} \mathbf{1}_{[0,1]}(x) + \mathbf{1}_{]1,\infty[}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence en loi de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit X_n une *var* de fonction de répartition $F_{X_n}(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^n \mathbf{1}_{[0,\infty[}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence en loi de $\left(\frac{X_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 7. Soient $\lambda > 0$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* suivant chacune la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \frac{1}{n^\lambda} \sup(e^{X_1}, \dots, e^{X_n})$. Étudier la convergence en loi de $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 8. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* suivant chacune la loi de Cauchy $\mathcal{C}(0, 1)$, *i.e.* de densité $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \frac{1}{n} \sup(X_1, \dots, X_n)$. Étudier la convergence en loi de $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 9. En utilisant le théorème central limite avec une suite de *var iid* bien choisie, montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$.

Exercice 10. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* suivant chacune la loi uniforme $\mathcal{U}([0, 1])$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = e^{\sqrt{n}} \left(\prod_{i=1}^n X_i\right)^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$. Étudier la convergence en loi de $(\ln(Y_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$, puis celle de $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 11. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit X_n une *var* suivant la loi du Chi-deux $\chi^2(n)$, *i.e.* de densité $f(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \mathbf{1}_{[0,\infty[}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, où $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \int_0^\infty t^{\frac{n}{2}-1} e^{-t} dt$. On pose $Y_n = \frac{X_n - n}{\sqrt{2n}}$. Étudier la convergence en loi de $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 12. En utilisant le théorème central limite avec une suite de *var iid* bien choisie, déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{n+\sqrt{n}} x^{n-1} e^{-x} dx$.

Exercice 13. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* suivant chacune la loi de Rademacher $\mathcal{R}(1)$: $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \sum_{k=1}^n \frac{X_k}{2^k}$. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sin\left(\frac{t}{2^n}\right) \neq 0$, on a $\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \sin(t) \left(2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)\right)^{-1}$, puis étudier la convergence en loi de $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 14. Soient $\alpha > 0$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de *var* indépendantes telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi uniforme $\mathcal{U}([-n^\alpha, n^\alpha])$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Montrer que, au voisinage de $t = 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction caractéristique de X_k , notée φ_{X_k} , vérifie $\ln(\varphi_{X_k}(t)) \sim -\frac{1}{6}t^2k^{2\alpha}$, puis étudier la convergence en loi de $\left(\frac{S_n}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 15. Soient $\theta \in]0, 1[$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* suivant chacune la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. On pose $Y_1 = X_1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, $Y_n = \theta Y_{n-1} + X_n$. Étudier la convergence en loi de $(Y_n)_{n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}}$.

Exercice 16. Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites de *var* telles que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi, $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi, et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n et Y_n sont indépendantes. Montrer que $(X_n Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi.

Exercice 17. En utilisant la loi faible des grands nombre et le fait que la convergence en probabilité implique la convergence en loi, répondez aux questions suivantes.

1. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \dots \int_0^1 f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) dx_1 \dots dx_n$.
2. Soient $p \in]0, 1[$ et f une fonction continue sur $[0, 1]$. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Exercice 18. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* admettant un moment d'ordre 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Étudier la convergence en loi de $\left(\sqrt{n} \left(\left(\frac{S_n}{n}\right)^2 - (\mathbb{E}(X_1))^2\right)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de deux manières : d'une part, avec le théorème de Slutsky, et d'autre part, avec la méthode delta.

Exercice 19. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* admettant un moment d'ordre 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ et $Z_n = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k - Y_n)^2$. Montrer que $\left(\sqrt{n} \left(\frac{Y_n - \mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{Z_n}}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une *var* suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.