TD n° 8 : Exercices supplémentaires

Exercice 1. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'événements telles que $\mathbb{P}(A_1) > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $N_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k}$, $m_n = \mathbb{E}\left(N_n\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_k\right)$ et $\theta_n = \frac{1}{m_n^2} \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_j \cap A_k\right)$.

1. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{V}\left(N_n\right)$ en fonction de θ_n et de m_n.
2. Montrer que, pour tout $x \geq 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $m_n > x$, on a $\mathbb{P}\left(N_n \leq x\right) \leq \mathbb{P}\left(\left|N_n - m_n\right| \geq m_n - x\right)$. En déduire que
$$\mathbb{P}\left(N_n \leq x\right) \leq \frac{\left(\theta_n - 1\right) m_n^2}{\left(m_n - x\right)^2}.$$
3. On suppose désormais que $\lim_{n\to\infty} m_n = \infty$ et $\liminf_{n\to\infty} \theta_n \leq 1$.
   (a) Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(N_n \leq x\right) = 0$.
   (b) Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $\mathbb{P}\left(\sup_{k\in\mathbb{N}^*} N_k \leq x\right) \leq \mathbb{P}\left(N_n \leq x\right)$.
   (c) En déduire que $\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} N_n = \infty\right) = 1$.
4. Montrer que, si les événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux à deux incompatibles, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\theta_n \leq 1 + \frac{1}{m_n}$. En déduire que, si $\lim_{n\to\infty} m_n = \infty$, alors on a
$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} N_n = \infty\right) = 1.$$

Exercice 2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n, r_1, \ldots, r_n$ $3n$ réels positifs tels que, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $p_k + q_k + r_k = 1$. Soient $X_1, \ldots, X_n$ n *var* indépendantes. Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, la loi de X_k est donnée par $\mathbb{P}(X_k = -1) = p_k$, $\mathbb{P}(X_k = 0) = q_k$, $\mathbb{P}(X_k = 1) = r_k$. On pose $Y_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$. Déterminer la loi de Y_n en fonction de $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n, r_1, \ldots, r_n$.

Exercice 3. Soient $p \in]0, 1[$, $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ et $X_1, \ldots, X_{n+1}$ $n + 1$ *var iid* suivant chacune la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. On pose $Y_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$ et $Z_n = \prod_{k=2}^{n+1} X_k$.

1. Montrer que $\mathbb{P}(Y_n = Z_n) = 1 - 2(1 - p)p^n$.
2. Calculer $\mathbb{C}(Y_n, Z_n)$.

Exercice 4. Soit X une *var* de densité f admettant un moment d'ordre 2. Montrer que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a
$$\mathbb{V}(aX + b) = \frac{a^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - y)^2 f(x) f(y) dx dy.$$

Exercice 5. Soit X une *var* de densité $f(x) = \frac{c}{1+x^3}\mathbf{1}_{[0,\infty[}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, avec $c = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$.

1. *Question préliminaire.* Montrer l'égalité $\int_0^1 \frac{x-1}{1+x^3}dx = -\int_1^\infty \frac{x-1}{1+x^3}dx$.
2. Calculer $\mathbb{E}(X-1)$ et en déduire $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 6. Soit X une *var* de densité $f(x) = c\frac{\arctan(x)}{(1+x^2)^2}\mathbf{1}_{[0,\infty[}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, avec $c = \frac{16}{\pi^2-4}$.

1. Montrer que $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \frac{c}{2}\left(\frac{\pi^2}{8} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} y\cos(2y)dy\right) = 1$.
2. L'objectif de cette question est de calculer $\mathbb{E}(X)$.
   (a) Montrer que, pour tout $x > 0$, on a $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.
   (b) En faisant le changement de variable : $y = \frac{1}{x}$, montrer que $\mathbb{E}(X) = \frac{c\pi}{4}\int_0^\infty \frac{y}{(1+y^2)^2}dy$.
   (c) Calculer $\mathbb{E}(X)$.
3. Calculer $\mathbb{E}(1+X^2)$, puis $\mathbb{V}(X)$.

Exercice 7. Soit X une *var* suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$. On pose $Y = \frac{\sup(X,1-X)}{\inf(X,1-X)}$.

1. Déterminer la fonction de répartition de Y. En déduire que Y possède la densité $f_Y(x) = \frac{2}{(1+x)^2}\mathbf{1}_{[1,\infty[}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $\mathbb{E}(\sqrt{Y}) = 1 + \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$. En déduire que $\mathbb{E}(\sqrt{Y}) = 1 + \frac{\pi}{2}$.

Exercice 8. Soient X et Y 2 *var iid* suivant chacune la loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$. On pose $Z = X^2 - Y$. Déterminer une densité de Z.

Exercice 9. Soient $\lambda > 0$, X une *var* suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ et Y une *var* suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$, avec X et Y indépendantes. Montrer que $\mathbb{E}(e^{-XY}) = \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}$.

Exercice 10.

1. *Questions intermédiaires.*
   (a) Pour tout $u \geq 0$, on pose $G(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\left(x^2+\frac{u^2}{x^2}\right)}dx$. Montrer que G est dérivable sur $]0,\infty[$ et vérifie $G'(u) = -G(u)$. En déduire que, pour tout $u \geq 0$, on a $e^{-u} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\left(x^2+\frac{u^2}{x^2}\right)}dx$.

(b) Soit X une *var* suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Calculer, pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{E}\left(e^{-\frac{t}{X^2}}\right)$.

2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* suivant chacune la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

   (a) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une densité de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X_k^2}$.

   (b) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une densité de $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X_k^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

3. *Questions intermédiaires.* Soit U une *var* de densité f paire.

   (a) Déterminer la loi de $U|U|^{-1}$.

   (b) Montrer que les *var* $|U|$ et $U|U|^{-1}$ sont indépendantes.

   (c) Soit V une *var* suivant la loi de Rademacher $\mathcal{R}(1)$: $\mathbb{P}(V=-1) = \dfrac{1}{2}$, $\mathbb{P}(V=1) = \dfrac{1}{2}$, avec V indépendante de $|U|$. Déterminer la loi de $V|U|$.

4. Soient A et B deux *var iid* suivant chacune la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Déduire des questions pécédentes la loi de $Z = \dfrac{AB}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Exercice 11. Soit X une *var* de densité f.

1. Montrer que si X suit une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ alors il existe une fonction g dérivable sur $[0,\infty[$ telle que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x)f(y) = g\left(x^2+y^2\right)$.

2. Dorénavant, la densité f de X est inconnue. On suppose que f est continue sur $\mathbb{R}$, strictement positive et vérifie $f'(1) = -f(1)$. On suppose également l'existence d'une fonction g dérivable sur $[0,\infty[$ telle que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x)f(y) = g\left(x^2+y^2\right)$.

   (a) Calculer, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^{*2}$, $f'(x)$ en fonction de $f(y)$ et $g\left(x^2+y^2\right)$.

   (b) Montrer que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^{*2}$, on a
   $$f'(x)\left(xf(x)\right)^{-1} = 2g'\left(x^2+y^2\right)\left(g\left(x^2+y^2\right)\right)^{-1}.$$

   (c) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $f'(x) = -xf(x)$.

   (d) En déduire que X suit une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

Exercice 12.

1. Soit X une *var* telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}\left(e^{|t||X|}\right)$ existe.

   (a) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a
   $$\mathbb{E}\left(e^{itX}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (it)^k \frac{1}{k!}\mathbb{E}\left(X^k\right).$$

(b) Soit Y une *var* telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\mathbb{E}\left(e^{|t||Y|}\right) < \infty$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{E}\left(Y^k\right) = \mathbb{E}\left(X^k\right)$. Montrer que X et Y suivent la même loi.

2. Soit U une *var* suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On pose $V = e^U$.

   (a) Déterminer une densité de V. Montrer que V admet admet un moment de tout ordre.

   (b) Soit f une densité de V. On définit la fonction g par
$$g(x) = (1 + \sin(2\pi \ln(x))) f(x) \mathbf{1}_{]0,\infty[}(x).$$
   Montrer que g est une densité.

   (c) *Question intermédiaire.* Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ky} \sin(2\pi y) e^{-\frac{y^2}{2}} dy = e^{\frac{k^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(2\pi y) e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 0.$$

   (d) Soit Z une *var* de densité g. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{E}\left(Z^k\right) = \mathbb{E}\left(V^k\right)$.

   (e) Montrer que V et Z ne suivent pas la même loi.

3. Est-ce que le résultat de la question 2 (e) est compatible avec celui de la question 1 (b) ?

Exercice 13. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$, positive et monotone. Soit X une *var* suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$. Montrer que
$$\mathbb{E}(f(X)f(1-X)) \leq (\mathbb{E}(f(X)))^2.$$
On pourra considérer une var Y indépendante de X et suivant la même loi que X, puis considérer la var $Z = (f(X) - f(Y))(f(1-X) - f(1-Y))$.

Exercice 14. Soient X, Y et Z trois *var iid* suivant chacune la loi normle $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Déterminer la loi de $U = X - 2Y + Z$.
2. Déterminer la loi de $V = \sqrt{X^2 + Y^2}$.
3. Déterminer la loi de $W = \dfrac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$.

Exercice 15. Soient $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ et $X_1, \ldots, X_n$ n *var* centrées réduites. On pose $Y_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $Z_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (X_k - Y_n)^2$. On suppose que Y_n et Z_n sont indépendantes. Soit φ la fonction caractéristique de X_1.

1. Montrer que $Z_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k^2 - \dfrac{2}{n} \sum_{j=2}^{n} \sum_{k=1}^{j-1} X_j X_k$.
2. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(Z_n e^{itY_n}) = (n-1)(\varphi(t))^n$.

3. D'autre part, montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\mathbb{E}(Z_n e^{itY_n}) = -(n-1)\left(\varphi(t)\right)^{n-2}\left(\varphi''(t)\varphi(t) - \left(\varphi'(t)\right)^2\right).$$

4. En déduire que φ est solution de l'équation différentielle : $y''(t)y(t) - \left(y'(t)\right)^2 = -\left(y(t)\right)^2$, avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

5. Montrer que X_1 suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

Exercice 16. Soient $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, $X_1, \ldots, X_n$ n *var iid* de fonction de répartition commune notée F, $X_{(1)} = \inf(X_1, \ldots, X_n)$ et $X_{(n)} = \sup(X_1, \ldots, X_n)$. On pose $Y = X_{(n)} - X_{(1)}$. Montrer que Y possède la densité
$$f_Y(x) = n(n-1)\int_{-\infty}^{\infty} \left(F(u+x) - F(u)\right)^{n-2} du \mathbf{1}_{[0,\infty[}(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 17. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* centrées admettant un moment d'ordre 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $c > 0$,
$$\mathbb{P}\left(\max_{k=1,\ldots,n} |S_k| > c\right) \leq \frac{1}{c^2}\mathbb{E}\left(\left(\max_{k=1,\ldots,n} |S_k|\right)^2\right).$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_n = \sup(|S_1|, \ldots, |S_n|)$. Soit $c > 0$. On pose $D_1 = \{M_1 > c\}$ et, pour tout $k \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, $D_k = \{M_{k-1} \leq c < M_k\}$.
   (a) Est-ce que les *var* S_k et $(S_n - S_k)\mathbf{1}_{D_k}$ sont indépendantes pour tout tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{1, \ldots, n\}$?
   (b) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $\mathbb{E}\left(S_k (S_n - S_k)\mathbf{1}_{D_k}\right)$.
   (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $S_n^2 \geq S_k^2 + 2S_k(S_n - S_k)$.
   (d) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $\mathbb{E}\left(S_n^2 \mathbf{1}_{D_k}\right) \geq c^2 \mathbb{P}(D_k)$.
   (e) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement $\bigcup_{k=1}^n D_k$ en fonction de M_n et c.
   (f) En déduire que, pour tout $c > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\mathbb{P}\left(\max_{k=1,\ldots,n} |S_k| > c\right) \leq \frac{1}{c^2}\mathbb{E}\left(S_n^2\right).$$

3. En quoi le résultat de la question 2 (f) est plus fort que celui de la question 1 ?

Exercice 18. Soient F et G deux fonctions de répartition continues et inversibles sur $\mathbb{R}$. Soit X une *var* de fonction de répartition F. On pose $Y = G^{-1}(F(X))$. Déterminer la fonction de répartition de (X, Y).

Exercice 19. Soient X et Y deux *var iid* suivant chacune la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

1. (a) Déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la loi de $X - xY$. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(X \leq xY)$.
   (b) *Question intermédiaire.* Soient A et B deux *var iid*. Une densité de A est notée f_A et une densité de B est notée f_B. Déterminer une densité de $\frac{A}{B}$ en fonction de f_A et f_B.
   (c) Déterminer une densité de $\frac{X}{Y}$. En déduire $\mathbb{P}\left(\frac{X}{Y} \leq x\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (d) Est-ce que les résultats obtenus aux questions 1 et 3 se contredisent ?
2. On pose $F = \frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y)$, $G = \frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y)$ et $H = \frac{X+Y}{X-Y}$.
   (a) Déterminer la loi de F, puis la loi de G.
   (b) Montrer que F et G sont indépendantes.
   (c) En déduire une densité de H.
3. Soient U et V deux *var iid* de densité commune $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi(1+x^4)}$, $x \in \mathbb{R}$. Déterminer une densité de $\frac{U}{V}$ et comparer la avec celle de $\frac{X}{Y}$.

Exercice 20. Soient $\theta > 0$, et X et Y deux *var iid* suivant chacune la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On pose $Z = \cos(\theta X) + \sin(\theta Y)$. Calculer $\mathbb{C}(X, Z)$.

Exercice 21. Soient X et Y deux *var iid* suivant chacune la loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$.

1. Déterminer une densité de (X, Y).
2. Déterminer la fonction de répartition de XY, puis une densité de XY.
3. Déterminer la fonction de répartition de $\frac{X}{Y}$, puis une densité de $\frac{X}{Y}$.
4. Calculer, pour tout $\alpha > 0$, $\mathbb{E}((XY)^\alpha)$ et $\mathbb{E}(|X-Y|^\alpha)$.

Exercice 22. Soient $a \in]-1, 1[$, f la densité $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$, F la fonction de répartition associée, *i.e.* $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, $x \in \mathbb{R}$ et (X, Y) un couple de *var* de densité :

$$g(x,y) = f(x)f(y)\left(1 + a(2F(x)-1)(2F(y)-1)\right), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Vérifier que g est bien une densité.
2. Déterminer une densité de X. Est-ce que X et Y suivent la même loi ?
3. Étudier l'indépendance de X et Y en fonction de a.
4. (a) En remarquant que $xf(x) = -f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$, montrer que $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)F(x)dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$.
   (b) En déduire la matrice de covariance de (X, Y).

5. Calculer $\mathbb{V}(X+Y)$.

Exercice 23. Soit (X,Y) un couple de *var* de densité $f(x,y) = \dfrac{1}{2\pi(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On pose $U = \dfrac{X}{\sqrt{1+Y^2}}$.

1. Vérifier que f est bien une densité.
2. Déterminer une densité de (U,Y).
3. Déterminer une densité de U, puis une densité de Y.
4. Est-ce que U et Y sont indépendantes ?

Exercice 24. Soient X et Y deux *var iid* de densité commune $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\mathbf{1}_{[1,\infty[}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. On pose $U = XY$.

1. Déterminer une densité de (U,Y).
2. Déterminer une densité de U.

Exercice 25. Soient X et Y deux *var iid* suivant chacune la loi Gumbel$(0,1)$, *i.e.* de densité $f(x) = e^{-x}\exp(-e^{-x})$, $x \in \mathbb{R}$. On pose $W = X - Y$ Montrer que W suit la loi Logistique$(0,1)$, *i.e.* de densité $f_W(x) = \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 26. Soient X et Y deux *var iid* suivant chacune la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer que la fonction caractéristique de XY est donnée par $\varphi_{XY}(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 27. Soient X et Y deux *var* indépendantes telles que X suit la loi bêta $B(2,2)$, *i.e.* de densité $f_X(x) = 6x(1-x)\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$, $x \in \mathbb{R}$ et Y suit la loi gamma $\Gamma(4,1)$, *i.e.* de densité $f_Y(y) = \dfrac{1}{6}y^3e^{-y}\mathbf{1}_{[0,\infty[}(y)$, $y \in \mathbb{R}$. On pose $U = XY$ et $V = (1-X)Y$.

1. Déterminer une densité de (U,V).
2. Déterminer une densité de U, puis une densité de V.
3. Est-ce que U et V sont indépendantes ?
4. Calculer $\mathbb{E}(U)$, $\mathbb{V}(U)$, $\mathbb{E}(V)$ et $\mathbb{V}(V)$.
5. Calculer $\mathbb{C}(U,V)$ et $\mathbb{V}(U-2V)$.

Exercice 28. Soient X et Y deux *var iid* suivant chacune la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$. On pose $U = \min(X,Y)$ et $V = \max(X,Y)$.

1. (a) Déterminer la loi de U.
   (b) Calculer $\mathbb{E}(U)$.

2. (a) Déterminer la loi de V.
   (b) Montrer que les *var* V et $X + \frac{Y}{2}$ suivent la même loi.
   (c) Calculer $\mathbb{E}(V)$ et $\mathbb{V}(V)$.
3. (a) Montrer que les *var* U et $V - U$ sont indépendantes. Déterminer la loi de $V - U$.
   (b) Calculer $\mathbb{P}(V \leq 1)$ et $\mathbb{P}(V - U \geq 2)$. Montrer que les *var* V et $V - U$ ne sont pas indépendantes.

Exercice 29. Soient $\sigma > 0$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* suivant chacune la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ et Y une *var* telle que $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$, avec $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et Y indépendantes. On pose $Z = \frac{1}{\sqrt{Y}} \sum_{k=1}^{Y} X_k$.

1. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $v \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{E}\left(e^{itZ}\mathbf{1}_{\{Y=v\}}\right) = \mathbb{P}(Y = v)e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}}$.
2. En déduire la loi de Z.

Exercice 30. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \ldots, X_n$ n *var iid* suivant chacune la loi de Cauchy $\mathcal{C}(0, 1)$, *i.e.* de densité $f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$ et de fonction caractéristique $\varphi(t) = e^{-|t|}$, $t \in \mathbb{R}$. On pose $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$. Déterminer la loi de Y_n.

Exercice 31. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $X_1, \ldots, X_n$ n *var* à densité indépendantes, Y une *var* suivant une loi exponentielle, avec $X_1, \ldots, X_n$ et Y indépendantes. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(Y \geq \sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(Y \geq X_k).$$

Exercice 32. Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* suivant chacune la loi de Bernoulli $\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ et Y une *var* telle que $Y(\Omega) = \mathbb{N}$, avec $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et Y indépendantes. On pose $U = \sum_{k=1}^{Y} X_k$ et $V = \sum_{k=1}^{Y}(1 - X_k)$ (avec la convention $\sum_{k=1}^{0} X_k = 0$).

1. Dans cette question, on suppose que Y suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$.
   (a) Déterminer la loi de U, puis la loi de V.
   (b) Déterminer la loi de (U, V).
   (c) Montrer que U et V sont indépendantes.
2. Dans cette question, on suppose que U et V sont indépendantes et que Y admet un moment d'ordre 1. On pose $m = \mathbb{E}(Y)$. Soit φ_Y la fonction caractéristique de Y.

(a) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\varphi_Y(t) = \left(\varphi_Y\left(1 + \frac{e^{it}-1}{2}\right)\right)^2$.

(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\varphi_Y(t) = \left(\varphi_Y\left(1 + \frac{e^{it}-1}{2^n}\right)\right)^{2^n}$.

(c) Montrer que Y suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(m)$.

Exercice 33. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var* telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n a pour fonction de répartition:

$$F_{X_n}(x) = \left(1 - \frac{1}{x+n}\right)\mathbf{1}_{[0,\infty[}(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $Z_n = \sup(X_1,\ldots,X_n)$.

1. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers 0.
2. Montrer que, pour tout $x \geq 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\mathbb{P}\left(\frac{Z_n}{n} \leq x\right) \leq \left(1 - \frac{1}{n(x+1)}\right)^n.$$
3. En déduire que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas en probabilité vers 0.

Exercice 34. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* suivant chacune la loi de Cauchy $\mathcal{C}(0,1)$, *i.e.* de densité $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\alpha \in \{1,2,3\}$, on pose $Y_n(\alpha) = \frac{1}{n^\alpha}\sup(X_1,\ldots,X_n)$.

1. Montrer que $(Y_n(1))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une *var* dont on donnera la loi.
2. Montrer que $(Y_n(2))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers 0.
3. Montrer que $(Y_n(3))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers 0.

Exercice 35. Soient U une *var* suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$ et V une *var* suivant la loi de Rademacher $\mathcal{R}(1)$: $\mathbb{P}(V=-1) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(V=1) = \frac{1}{2}$, avec U et V deux *var* indépendantes. On pose $X = \frac{V}{\sqrt{U}}$.

1. Déterminer une densité de X.
2. Déterminer le réel r tel que X admet un moment d'ordre r.
3. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* suivant chacune la même loi que X. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $W_n = \frac{1}{\sqrt{n}}S_n$.

(a) Pourquoi ne peut-on pas utiliser le théorème central limite pour établir la convergence en loi de $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

(b) Soit φ_{X_1} la fonction caractéristique de X_1. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$1 - \varphi_{X_1}(t) = 2t^2 \int_{|t|}^{\infty} \frac{1-\cos(y)}{y^3} dy.$$

(c) Montrer que la fonction caractéristique de W_n est, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_{W_n}(t) = \left(1 - 2\frac{t^2}{n\ln(n)} \int_{\frac{|t|}{\sqrt{n\ln(n)}}}^{\infty} \frac{1-\cos(y)}{y^3} dy\right)^n.$$

(d) En admettant que, au voisinage de $u = 0$, $\int_{|u|}^{\infty} \frac{1-\cos(y)}{y^3} dy \sim -\frac{1}{2}\ln(|u|)$, étudier la convergence en loi de $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 36. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* suivant chacune la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \sup(X_1, \ldots, X_n)$ et $Z_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{k}$.

1. Déterminer une densité de Y_n
2. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une densité de $\frac{X_{n+1}}{n+1}$.
3. *Questions intermédiaire.* Soient X et Y deux *var* indépendantes. Une densité de X est notée f_X et une densité Y est notée f_Y. Donner une densité de $X + Y$ en fonction de f_X et f_Y.
4. En utilisant le fait que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $Z_{n+1} = Z_n + \frac{X_{n+1}}{n+1}$, montrer que Y_n et Z_n suivent la même loi.
5. Calculer $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{V}(X_1)$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{V}(Y_n) = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 37. Soient $\lambda > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n une *var* suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(n\theta)$.

1. Montrer que $\left(\frac{X_n - n\theta}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers 0.
2. En déduire que $\lim_{n\to\infty} e^{-n\theta} \sum_{k=0}^{[nx]} \frac{(n\theta)^k}{k!} = \mathbf{1}_{]\theta,\infty[}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 38. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* centrées réduites telle que $X_1(\Omega) = [-1, 1]$. Montrer qu'il ne peut pas exister des constantes $A > 0$ et $\tau > \frac{1}{2}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $a > 0$, on a

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} X_k\right| \geq a\right) \leq Ae^{-\tau a^2}.$$

Exercice 39. Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var* réduites. On suppose que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une *var* V. Pour tout $l \geq 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on définit la fonction h_l par $h_l(x) = \inf(x, l)$.

1. *Question préliminaire.* Montrer que, pour toute *var* Z admettant un moment d'ordre 1, on a $\lim_{l\to\infty} \mathbb{E}(h_l(Z)) = \mathbb{E}(Z)$.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 \leq \mathbb{E}(V_n) - \mathbb{E}(h_l(V_n)) \leq \dfrac{1}{l}$.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$|\mathbb{E}(V_n) - \mathbb{E}(V)| \leq \frac{1}{l} + |\mathbb{E}(h_l(V_n)) - \mathbb{E}(h_l(V))| + \mathbb{E}(V) - \mathbb{E}(h_l(V)).$$

4. En déduire que
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(V_n) = \mathbb{E}(V).$$

5. *Application.* Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* centrées réduites. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $V_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}|S_n|$.
   (a) Montrer que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une *var* suivant la même loi que $|Z|$ où Z désigne une *var* suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.
   (b) En déduire que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(V_n) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$.

Exercice 40. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* admettant un moment d'ordre 2. On pose $m = \mathbb{E}(X_1)$ et $\sigma^2 = \mathbb{V}(X_1)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $Y_n = \dfrac{S_n}{n}$. Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dérivable au point m.

1. Montrer l'existence d'une fonction h vérifiant $\lim_{x\to 0} h(x) = 0$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $g(Y_n) = g(m) + (Y_n - m)\, g'(m) + (Y_n - m)\, h(Y_n - m)$.

2. Montrer que $\left(\sqrt{n}\,(Y_n - m)\, h(Y_n - m)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers 0.

3. Étudier la convergence en loi de $\left(\sqrt{n}\,(Y_n - m)\, g'(m)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

4. En déduire que $\left(\sqrt{n}\,(g(Y_n) - g(m))\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une *var* suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(0, (g'(m))^2\sigma^2\right)$.

5. *Application.* Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* suivant chacune la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ avec $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $Y_n = \dfrac{S_n}{n}$.
   (a) Étudier la convergence en loi de $\left(\sqrt{n}\,(\arctan(Y_n) - \arctan(m))\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (b) Étudier la convergence en loi de $(\sqrt{n}\,(Y_n^2 - m^2))_{n\in\mathbb{N}^*}$.

(c) Retrouver le résultat de la question 5 (b) en remarquant que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n^2 - m^2 = (Y_n - m)(Y_n + m)$.

Exercice 41. Soient X_1, X_2 et X trois *var iid* centrées admettant un moment d'ordre 2. On pose $\sigma^2 = \mathbb{E}(X^2)$. On suppose qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $X_1 + X_2$ et cX suivent la même loi.

1. Quelle est la seule valeur possible de c ?
2. Montrer que la fonction caractéristique φ_X de X vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_X(t) = \left(\varphi_X\left(\frac{t}{\sqrt{2^n}}\right)\right)^{2^n}$.
3. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* de loi commune la loi que X. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $W_n = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k=1}^{2^n} U_k$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions caractéristiques de W_n et X sont égales.
4. En déduire que X suit la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Exercice 42. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* telle que la loi de X_1 est donnée par $\mathbb{P}(X_1 = k) = e^{-1}\frac{1}{(k+1)!}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. *Questions intermédiaires.* Soient $\lambda > 0$ et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* suivant chacune la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de $\sum_{k=1}^{n} U_k$.
2. (a) Déterminer la loi de $X_1 + 1$.

   (b) En déduire que, pour tout entier $k \geq -n$ avec $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}(S_n = k) = e^{-n}\frac{n^{k+n}}{(n+k)!}$.

   (c) Montrer que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n \leq 0) = \frac{1}{2}$.

   (d) Expliquer pourquoi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $e^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} + \int_0^n (n-u)^n \frac{1}{n!} e^u du$.

   (e) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{P}(S_n \leq 0) = e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}$.

   (f) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\int_0^n t^n e^{-t} dt = n!\,(1 - \mathbb{P}(S_n \leq 0))$.

   (g) Donner un équivalent de $\int_0^n t^n e^{-t} dt$ quand $n \to \infty$.

Exercice 43. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* suivant chacune la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$.

1. Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, on a $\mathbb{P}(Y_n \geq \epsilon) \leq \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^n$.

2. Étudier la convergence presque sûre de $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 44. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var* suivant la même loi avec $X_1(\Omega) \subseteq [0,\infty[$ et admettant un moment d'ordre 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \sup(X_1,\ldots,X_n)$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\mathbb{E}\left(\left|\frac{Y_n}{n} - 0\right|\right) = \int_0^\infty \frac{1}{n}\mathbb{P}(Y_n \geq t)dt.$$

2. Montrer que, pour tout $t > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{P}(Y_n \geq t) \leq n\mathbb{P}(X_1 \geq t)$.

3. Montrer que $\left(\frac{Y_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en $\mathbb{L}^1$ vers 0.

Exercice 45. Soient $\alpha > 1$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* de densité commune $f_{X_1}(x) = \alpha x^{-\alpha-1}\mathbf{1}_{[1,\infty[}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Z_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$.

1. Montrer que $(Z_n)n \in \mathbb{N}^*$ converge en $\mathbb{L}^1$ vers 0.

2. (a) Étudier la convergence presque sûre de $\left(\frac{\ln(Z_n)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   (b) En déduire la divergence presque sûre de $(Z_n)n \in \mathbb{N}^*$.

3. Soit $\theta > 0$. On définit la *var* M par $M = \inf_{n\in\mathbb{N}}\left\{Z_{n+1} > e^\theta\right\}$.

   (a) Montrer que $\mathbb{P}(M < \infty) = 1$.

   (b) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\{M = k\} = \left\{Z_{k+1} > e^\theta \geq Z_k\right\}$.

   (c) *Question intermédiaire.* Soient X et Y deux *var* indépendantes. Une densité de X est notée f_X et une densité Y est notée f_Y. Déterminer une densité de XY en fonction de f_X et f_Y.

   (d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une densité de Z_n est
$$f_{Z_n}(x) = \frac{1}{(n-1)!}\alpha^n x^{-\alpha-1}(\ln(x))^{n-1}\mathbf{1}_{]1,\infty[}(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

   (e) En déduire que M suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\alpha\theta)$.

4. Soit $(W_n)_{n\in\mathbb{N}-\{0,1\}}$ une suite de *var* telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}-\{0,1\}$, une densité de W_n est

   $f_{W_n}(x) = nx^{-n-1}\mathbf{1}_{[1,\infty[}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. On définit la suite de *var* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}-\{0,1\}}$ par $U_n = (n-1)W_n - n$. Étudier la convergence en loi de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}-\{0,1\}}$.

Exercice 46. Soient $\lambda > 0$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* suivant chacune la loi de Laplace $\mathcal{L}(0,1)$, *i.e.* de densité $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, et $(N_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var* telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, N_n suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(n)$, avec $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(N_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ indépendantes. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \frac{1}{\sqrt{2n}} \sum_{k=1}^{N_n} X_k$ (avec la convention $\sum_{k=1}^{0} X_k = 0$).

1. Déterminer la fonction caractéristique de X_1.
2. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction caractéristique de Y_n.
3. Étudier la convergence en loi de $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 47. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var* indépendantes telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi exponentielle $\mathcal{E}\left(\frac{1}{n}\right)$.

1. (a) Montrer que $\left(\frac{X_n}{n\ln(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers 0.
   (b) Étudier la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n \geq n\ln(n))$.
   (c) En déduire que $\left(\frac{X_n}{n\ln(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge presque sûrement.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = X_n - [X_n]$.
   (a) En remarquant que, pour tout $x \in [0,1[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
   $\{Y_n \leq x\} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{k \leq X_n \leq x + k\}$, déterminer la fonction de répartition de Y_n.
   (b) Étudier la convergence en loi de $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 48. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* suivant chacune la loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Z_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $W_n = (Z_n)^{\frac{1}{n}}$.
   (a) Étudier la convergence presque sûre de $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (b) En déduire la convergence presque sûre de la série $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n$.
2. Soit $\theta > 0$. On définit la *var* M par $M = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left\{Z_{n+1} < e^{-\theta}\right\}$.
   (a) Montrer que $\mathbb{P}(M < \infty) = 1$.
   (b) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\{M = k\} = \left\{Z_k \geq e^{-\theta} > Z_{k+1}\right\}$.

(c) *Question intermédiaire.* Soient X et Y deux *var* indépendantes. Une densité de X est notée f_Y et une densité Y est notée f_Y. Déterminer une densité de la *var* XY en fonction de f_X et f_Y.

(d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une densité de Z_n est donnée par

$$f_{Z_n}(x) = \frac{1}{(n-1)!} \left(-\ln(x)\right)^{n-1} \mathbf{1}_{]0,1]}(x).$$

(e) En déduire que la loi de M suit la loi de poisson $\mathcal{P}(\theta)$.

3. (a) Calculer $\mathbb{V}\left(\ln(X_1)\right)$.

(b) Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(Z_n \leq e^{-n}\right) = \frac{1}{2}.$$

Exercice 49. Soient $(p,q) \in]0,1[^2$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* suivant chacune la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* suivant chacune la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(q)$, avec $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ indépendantes. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n} X_k Y_k$.

1. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{C}(S_n, T_n)$.
2. Étudier la convergence presque sûre de $\left(\frac{1}{n}(T_n - qS_n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. Étudier la convergence en loi de $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}(T_n - qS_n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 50. Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* suivant chacune la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\left(2 - 3X_k\right)$. Étudier la convergence presque sûre de $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 51. Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* suivant chacune la loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} \sin\left(\frac{\pi}{2}X_k\right)$ et $Z_n = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}X_k\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}(1-X_k)\right)\right)$.

1. Comparer $\mathbb{E}(Y_n)$ et $\mathbb{E}(Z_n)$.
2. Comparer $\mathbb{V}(Y_n)$ et $\mathbb{V}(Z_n)$.

Exercice 52. On dit qu'une *var* X suit une loi stable si, pour toute suite de *var iid* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec X_1 de même loi que X, il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les *var* $\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $a_n X + b_n$ suivent la même loi.

1. Soit $\lambda > 0$ et X une *var* suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

   (a) Calculer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}\left(e^{itX}\right)$.

(b) Montrer qu'il ne peut pas exister deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que, pour tout $t\in\mathbb{R}$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\left(\mathbb{E}\left(e^{itX}\right)\right)^n = e^{itb_n}\mathbb{E}\left(e^{ita_nX}\right).$$

(c) Est-ce que X suit une loi stable ?

2. Soit Y une *var* suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Est-ce que Y suit une loi stable ?

3. Dorénavant, on considère une *var* Z admettant un moment d'ordre 2. On suppose que Z a une loi stable. On pose $m=\mathbb{E}(Z)$ et $\sigma^2=\mathbb{V}(Z)$. Soit $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* avec Z_1 de même loi que Z.

(a) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $\sqrt{n}X+m\left(n-\sqrt{n}\right)$ suivent la même loi.

(b) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $U_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(Z_k-m)$ et Z_1-m suivent la même loi.

(c) En déduire que Z suit la loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$.

4. Existe t'il des *var* continues non constantes suivant une loi stable non gaussienne ? Si oui, donner un exemple précis.

Exercice 53. Soient $\alpha\geq 1$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var* indépendantes telle que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la densité de X_n est $f_{X_n}(x)=\dfrac{1}{2}n^{\alpha}e^{-n^{\alpha}|x|}$, $x\in\mathbb{R}$.

1. On suppose que $\alpha>1$.

(a) Calculer, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\left(|X_n|>n^{-\frac{\alpha+1}{2}}\right)$.

(b) Montrer que, pour n suffisament grand, presque sûrement, $|X_n|\leq n^{-\frac{\alpha+1}{2}}$.

(c) Étudier la convergence presque sûre de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|X_n|$.

(d) Étudier la convergence en loi de $\left(\sqrt{n}\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}X_k-\mathbb{E}\left(X_1\right)\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Est-ce que le résultat obtenu est en contradiction avec le théorème central limite ?

(e) Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var* indépendantes telle que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la loi de Y_n est donnée par $\mathbb{P}(Y_n=0)=1-n^{-\alpha}$, $\mathbb{P}(Y_n=n)=n^{-\alpha}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{|X_nY_n|}$ converge presque sûrement.

2. On suppose que $\alpha=1$. On définit la suite de *var* $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $Z_n=\inf(|X_1|,\ldots,|X_n|)$.

(a) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x>0$,

$$\mathbb{P}(Z_n\leq x)=1-e^{-\frac{n(n+1)x}{2}}.$$

(b) Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(Z_n > n^{-\frac{3}{2}}\right)$ converge.

(c) Étudier la convergence presque sûre de la série $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n$.

Exercice 54. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var* centrées indépendantes. On suppose qu'il existe une constante $b > 0$ telle que, presque sûrement, on a $\sup_{n\in\mathbb{N}^*} |X_n| \leq b$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $M_n = \sup(|S_1|, \ldots, |S_n|)$. Soit $c > 0$. On définit la suite d'événements $(C_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ par $C_1 = \{M_1 > c\}$ et, pour tout $k \geq \mathbb{N} - \{0, 1\}$, $C_k = \{M_{k-1} \leq c < M_k\}$.

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}\left(S_k^2 \mathbf{1}_{C_k}\right) \leq (c+b)^2 \,\mathbb{P}\left(C_k\right)$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{1, \ldots, n\}$, $S_n - S_k$ est indépendante des *var* $\mathbf{1}_{C_k}$, S_k et $S_k \mathbf{1}_{C_k}$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on a $\mathbb{E}\left((S_n - S_k)^2 \mathbf{1}_{C_k}\right) \leq \mathbb{E}\left(S_n^2\right) \mathbb{P}\left(C_k\right)$.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on a $\mathbb{E}\left(S_k \left(S_n - S_k\right) \mathbf{1}_{C_k}\right) = 0$.
5. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement $\bigcup_{k=1}^{n} C_k$ en fonction de M_n et c.
6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(S_n^2 \mathbf{1}_{\{M_n > c\}}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(S_k^2 \mathbf{1}_{C_k}\right) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left((S_n - S_k)^2 \mathbf{1}_{C_k}\right) \\ &\leq \left((b+c)^2 + \mathbb{E}\left(S_n^2\right)\right) \mathbb{P}\left(M_n > c\right).\end{aligned}$$
7. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{E}\left(S_n^2 \mathbf{1}_{\{M_n \leq c\}}\right) \leq c^2 \left(1 - \mathbb{P}\left(M_n > c\right)\right)$.
8. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{P}\left(M_n > c\right) \geq 1 - (b+c)^2 \left(\mathbb{E}\left(S_n^2\right)\right)^{-1}$.
9. En déduire que, si $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_k^2) = \infty$, alors
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(M_n > c\right) = 1.$$

Exercice 55. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* centrées et réduites. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $u_n = \left(\mathbb{E}\left(e^{-S_n} \mathbf{1}_{\{S_n \geq 0\}}\right)\right)^{\frac{1}{n}}$ et $\alpha = \dfrac{3}{4}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq 1$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq \left(\mathbb{E}\left(e^{-n^{-\alpha} S_n} \mathbf{1}_{\{S_n \geq 0\}}\right)\right)^{n^{-(1-\alpha)}}$.

3. Soit $u \in]0,1[$. Montrer que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(e^{-n^{-\alpha}S_n}\mathbf{1}_{\{S_n\geq 0\}}\right) &\geq (1-u)\,\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\{S_n\geq 0\}}\mathbf{1}_{\{|S_n|\leq -n^{\alpha}\ln(1-u)\}}\right)\\ &= (1-u)\left(\mathbb{P}\left(S_n\geq 0\right)-\mathbb{P}\left(|S_n|\geq -\ln\left(1-u\right)n^{\alpha}\right)\right).\end{aligned}$$

4. (a) Étudier la convergence en loi de $\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   (b) En déduire que $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(S_n\geq 0\right)=\frac{1}{2}$.

5. (a) Calculer, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}\left(S_n\right)$ et $\mathbb{E}\left(S_n^2\right)$.

   (b) En déduire que, pour tout $\epsilon>0$, on a $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(|S_n|\geq\epsilon n^{\alpha}\right)=0$.

6. En déduire $\lim_{n\to\infty}u_n$.

Exercice 56. Soit X une *var* à densité. Pour tout $\mathbb{N}^*$, on pose $Y_n=\frac{[nX]}{n}$. Montrer que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X.

Exercice 57. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de *var iid* de densité commune $f(x)=2x\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$, $x\in\mathbb{R}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $Y_n=\min\left\{k\in\mathbb{N};\ X_k\geq e^{-\frac{1}{2n}}\right\}$. Étudier la convergence en loi de $\left((1-e^{-\frac{1}{2n}})Y_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 58. Soient $p\in]0,1[$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* suivant chacune la loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* suivant chacune la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, avec $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ indépendantes. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $Z_n=Y_n-X_n$ et $W_n=n\left(1-\sup(Z_1,\ldots,Z_n)\right)$.

1. Déterminer, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $Z_n(\Omega)$ et $W_n(\Omega)$.

2. Montrer que la fonction de répartition de Z_1 est donnée par

$$F_{Z_1}(x)=(1+x)(1-p)\mathbf{1}_{]-1,0]}(x)+(1-p+px)\mathbf{1}_{]0,1]}(x)+\mathbf{1}_{]1,\infty[}(x),\qquad x\in\mathbb{R}.$$

3. Déterminer, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction de répartition de W_n.

4. Étudier la convergence en loi de $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 59. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* centrées réduites. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$ et $u_n=\mathbb{P}\left(\{S_n>0\}\cap\{S_{2n}<0\}\right)$.

1. *Question préliminaire.* Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de *var* à densité vérifiant :

   - pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, U_n et V_n sont indépendantes,
   - $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent en loi.

   Montrer que $\left((U_n,V_n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers un couple de *var* indépendantes.

2. (a) Est-ce que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les *var* S_n et $S_{2n} - S_n$ sont indépendantes ?

   (b) Étudier la convergence en loi de $\left(\left(\frac{1}{\sqrt{n}} S_n, \frac{1}{\sqrt{n}} (S_{2n} - S_n)\right)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

3. *Question intermédiaire.* On pose $\mathcal{A} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, \ y < -x\right\}$. Calculer l'intégrale double $K = \frac{1}{2\pi} \int \int_{\mathcal{A}} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy$.

4. Déterminer $\lim_{n \to \infty} u_n$.

Exercice 60. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* centrées réduites. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. Étudier la convergence en loi de $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

2. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction caractéristique de $Y_{2n} - Y_n$.

3. Montrer que $(Y_{2n} - Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi.

4. Est-ce que $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité ?