TD n° 8 : Méthode des moments

Exercice 1. Soient $\theta > 0$ et X une *var* suivant la loi de Bernoulli $\mathcal{B}\left(\frac{1}{\theta+1}\right)$, i.e. dont la loi est donnée par

$$\mathbb{P}(X=0) = \frac{\theta}{\theta+1}, \qquad \mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{\theta+1}.$$

1. Déterminer un estimateur de θ par la méthode des moments.
2. Est-ce que cet estimateur est consistant ? Est-ce qu'il est asymptotiquement normal ?
3. Des observations de X sur 15 individus choisis au hasard sont les suivantes :

0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1

   Donner une estimation ponctuelle pour θ.

Exercice 2. Soit X le caractère égale au nombre de pannes que subit un certain type d'appareil électroménager. On suppose que X peut être modélisée par une *var* suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$, un paramètre inconnu, i.e. dont la loi est donnée par

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de X.

1. Expliquer pourquoi $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ est un estimateur de λ par la méthode des moments.
2. Dorénavant, on cherche à estimer la probabilité qu'il n'y ait aucune panne. Cette probabilité est notée θ.
   (a) Exprimer θ en fonction de λ.
   (b) Donner, sans calcul, la loi de $n\overline{X}_n$.
   (c) On pose $\widehat{\theta}_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n\overline{X}_n}$. Montrer que $\widehat{\theta}_n$ est un estimateur sans biais de θ.
   (d) Des observations de X sur 15 appareils électroménagers choisis au hasard sont les suivantes :

3	3	1	1	1	6	4	2	3	1	5	5	2	7	4

   Donner une estimation ponctuelle pour θ.

Exercice 3. Soient $\theta > -1$ et X une *var* de densité :

$$f(x) = \begin{cases} (\theta+1)(\theta+2)(1-x)x^{\theta} & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer un estimateur de θ par la méthode des moments.
2. Des observations de X sur 20 individus choisis au hasard sont les suivantes :

0.68	0.88	0.68	0.33	0.64	0.03	0.55	0.38	0.96	0.34	0.74	0.76	0.74

0.28	0.14	0.43	0.99	0.95	0.68	0.37

Donner une estimation ponctuelle pour θ.

Exercice 4. Soient $\mu > 0$ et X une *var* de densité :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\ln(\mu))^2}{2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Déterminer un estimateur de μ par la méthode des moments.

Exercice 5. Soient $p \in]0,1[$ et X une *var* de densité :

$$f(x) = p\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} + (1-p)\frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Déterminer un estimateur de p par la méthode des moments.

Exercice 6. Soient $\theta > 1$ et X une *var* suivant la loi de Pareto $\mathcal{P}_{ar}(\theta)$, i.e. vérifiant :

$$\mathbb{P}(X > x) = \begin{cases} x^{-\theta} & \text{si } x \geq 1, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminer un estimateur de θ par la méthode des moments.

Exercice 7. Soient $\theta > 0$ et X une *var* suivant la loi exponentielle de paramètre θ, i.e. de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Calculer $\mathbb{E}(X)$. En déduire un estimateur de θ par la méthode des moments.
2. Calculer $\mathbb{E}(X^2)$. En déduire un autre estimateur de θ par la méthode des moments.
3. Comment pourrait-on comparer la qualité des 2 estimateurs précédents ?

Exercice 8. Soient $\theta > 0$ et X une *var* suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([0,\theta])$, i.e. de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & \text{si } x \in [0,\theta], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer un estimateur de θ par la méthode des moments.
2. Des observations de X sur 4 individus choisis au hasard sont les suivantes :

3	5	6	18

   Donner une estimation ponctuelle pour θ. Ne remarquez-vous rien d'anormal ?