TD n° 9 : Méthode du maximum de vraisemblance

Exercice 1. Soient $\lambda > 0$ et X une *var* suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, i.e. dont la loi est donnée par

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

1. Donner la fonction de vraisemblance.
2. Donner la fonction de log-vraisemblance.
3. Déterminer un estimateur de λ par la méthode du maximum de vraisemblance.
4. Est-ce que cet estimateur est consistant ? Est-ce qu'il est asymptotiquement normal ?
5. Des observations de X sur 15 appareils électroménagers choisis au hasard sont les suivantes :

3	3	1	1	1	6	4	2	3	1	5	5	2	7	4

Donner une estimation ponctuelle pour λ.

Exercice 2. Soient $p \in]0, 1[$ et X une *var* suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, i.e. dont la loi est donnée par

$$\mathbb{P}(X = k) = p(1 - p)^{k-1}, \qquad k \in \mathbb{N}^*.$$

1. Déterminer un estimateur de p par la méthode du maximum de vraisemblance.
2. Des observations de X sur 12 individus choisis au hasard sont les suivantes :

1	2	1	4	2	1	1	5	3	2	10	1

Donner une estimation ponctuelle pour p.

Exercice 3. Soient $\mu \in \mathbb{R}$ et X une *var* de densité :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Déterminer un estimateur de μ par la méthode du maximum de vraisemblance.

Exercice 4. Soient $\theta > 1$ et X une *var* suivant la loi de Pareto $\mathcal{P}_{ar}(\theta)$, i.e. vérifiant :

$$\mathbb{P}(X > x) = \begin{cases} x^{-\theta} & \text{si } x \geq 1, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminer un estimateur de θ par la méthode du maximum de vraisemblance.

Exercice 5. Soient $\theta > 0$ et X une *var* suivant la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\theta}$, i.e. de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta}x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Donner la fonction de vraisemblance.
2. Déterminer un estimateur $\widehat{\theta}_n$ de θ par la méthode du maximum de vraisemblance.
3. Est-ce que $\widehat{\theta}_n$ est sans biais ? Calculer son risque quadratique.
4. Préciser les garanties théoriques assurant que $\widehat{\theta}_n$ soit consistant et asymptotiquement normal.

Exercice 6. Soient $\theta \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$ et X une *var* de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\theta}{1-\theta} x^{\frac{2\theta-1}{1-\theta}} & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Donner la fonction de vraisemblance.
2. Déterminer un estimateur $\widehat{\theta}_n$ de θ par la méthode du maximum de vraisemblance.

Exercice 7. Soient $\theta > 0$ et X une *var* suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([0,\theta])$, i.e. de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta} & \text{si } x \in [0,\theta], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Donner la fonction de vraisemblance.
2. Vérifier qu'un estimateur $\widehat{\theta}_n$ de θ par la méthode du maximum de vraisemblance est donné par
$$\widehat{\theta}_n = \sup(X_1, \ldots, X_n),$$
où $X_1, \ldots, X_n$ sont n *var iid* suivant la même loi que X.
3. Déterminer la fonction de répartition de $\widehat{\theta}_n$, puis sa densité.
4. Calculer $\mathbb{E}(\widehat{\theta}_n)$ et $\mathbb{V}(\widehat{\theta}_n)$.
5. Déduire de la question précédente un estimateur $\widetilde{\theta}_n$ sans biais de θ.
6. Vérifier que le risque quadratique de $\widetilde{\theta}_n$ vaut :
$$R(\widetilde{\theta}_n, \theta) = \frac{1}{n(n+2)}\theta^2.$$
7. Des observations de X sur 4 individus choisis au hasard sont les suivantes :

3	5	6	18

Donner une estimation ponctuelle pour θ.