TP n° 10 : Couples de *var* à densité

Note : une partie de ce TP demande l'utilisation du package mvtnorm.

Exercice 1. On considère la fonction

$$f(x,y) = 0.2(x-5)^2 + 10\exp\left(-\left(\frac{y-1}{3}\right)^2\right), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Reproduire et analyser les commandes ci-dessous qui permettent de représenter cette fonction :

```
f = function(x, y) {
0.2 * (x - 5)^2 + 10 * exp(-((y - 1) / 3)^2)
}
ngrid = 50
xgrid = seq(0, 10, length = ngrid + 2)[-c(1, ngrid + 2)]
ygrid = xgrid
yf = outer(xgrid, ygrid, f)
res = persp(xgrid, ygrid, yf, theta = 130, phi = 20, col = rainbow(12))
```

Exercice 2. Soient X et Y deux *var* indépendantes, avec

- X suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, *i.e.* de densité

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

- Y suivant la loi gamma $\Gamma(5,1)$, *i.e.* de densité

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{24} x^4 e^{-x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Quelle est la densité du couple de *var* (X,Y) ?
2. Tracer cette densité sur le domaine $[-5,5]^2$ *(on pourra utiliser l'exercice 1)*.
3. Simuler un échantillon de taille 10000 de (X,Y) et représenter le sur un graphique.

Exercice 3. Soit (X,Y) un *car* de densité

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \exp\left(-(x^2 - \sqrt{2}xy + y^2)\right), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Montrer que (X,Y) est un couple de *var* suivant la loi $\mathcal{N}_2(0_2, \Sigma)$ avec

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Tracer f sur le domaine $[-5, 5]^2$ *(on pourra utiliser l'exercice 1)*.

Exercice 4. Le package `mvtnorm` contient des fonctions permettant de manipuler facilement les vecteurs gaussiens.

1. Installer le package `mvtnorm` en utilisant les options ou les commandes :

```
install.packages("mvtnorm")
library(mvtnorm)
```

2. Reproduire et analyser les commandes suivantes :

```
Mean = c(0, 1)
Sigma = matrix(c(1, 0.2, 0.2, 1), 2, 2)
dmvnorm(c(0.5, 0.5), Mean, Sigma)
```

3. Reproduire et analyser les commandes suivantes :

```
Sigma = matrix(c(1, 0.1, 0.1, 1), 2, 2)
Mean = c(0.3, 1.1)
pmvnorm(lower = rep(-Inf, 2), upper = c(1, 4), Mean, Sigma)
```

4. Reproduire et analyser les commandes suivantes :

```
N = 100
Mean = c(0, 0)
Sigma = matrix(c(1, 0.5, 0.5, 1), 2, 2)
x = seq(-3, 3, length = N)
y = seq(-3, 3, length = N)
z = matrix(0, N, N)
for (i in 1:N) for (j in 1:N) {
z[i, j] = dmvnorm(c(x[i], y[j]), Mean, Sigma) }
persp(x, y, z)
```

5. Reproduire et analyser les commandes suivantes :

```
N = 100
Mean = c(1, 1)
Sigma = matrix (c(1.1, 1.4, 1.4, 5.3), 2, 2)
x = seq(Mean[1] - 3 * Sigma[1, 1], Mean[1] + 3 * Sigma[1, 1], length.out = N)
y = seq(Mean[2] - 3 * Sigma[2, 2], Mean[2] + 3 * Sigma[2, 2], length.out = N)
Prob = function(x, y){
dmvnorm(cbind(x, y), Mean, Sigma) }
p = outer(x, y, FUN = ''Prob")
persp(x, y, p, theta = 140, phi = 10, zlim = c(0, 0.1), col = rainbow(12))
```