SOLUTION TP n° 3

Solution 1. On considère la commande `exp(-3) * 3^4 / factorial(4)`.

1. Préciser à quelle loi de probabilité elle correspond et ce qu'elle renvoie :

   La commande `exp(-3) * 3^4 / factorial(4)` correspond à $\mathbb{P}(X = 4)$, où X est une *var* suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(3)$. Elle renvoie : `[1] 0.1680314`

2. Donner la commande prédéfinie de R équivalente :

   `dpois(4, 3)`

Solution 2. Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. La commande `dgeom(k, p)` donne la probabilité qu'une *var* X suivant la loi géométrique modifiée en 0 $\mathcal{G}_*(p)$ soit égale à k, *i.e.*

$$\mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^k p, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

1. Écrire une fonction R équivalente à la fonction `dgeom` :

   `LoiGeom = function(k, p) { (1 - p)^k * p }`

2. On se fixe $p = 0.35$. Calculer $\mathbb{P}(X \leq 3)$, $\mathbb{P}(X \geq 4)$ et $\mathbb{P}(X \neq 5)$.

   $\mathbb{P}(X \leq 3)$:

   `pgeom(3, 0.35)` renvoie : `[1] 0.8214937`

   $\mathbb{P}(X \geq 4)$: On a $\mathbb{P}(X \geq 4) = 1 - \mathbb{P}(X < 4) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 3)$, donc

   `1 - pgeom(3, 0.35)` renvoie : `[1] 0.1785063`

   $\mathbb{P}(X \neq 5)$: On a $\mathbb{P}(X \neq 5) = 1 - \mathbb{P}(X = 5)$, donc

   `1 - dgeom(5, 0.35)` renvoie : `[1] 0.9593898`

3. Est-ce que les commandes suivantes sont équivalentes ?

   (a) `pgeom(k, p)` et `1 - (1 - p)^(k + 1)`: La commande `pgeom(k, p)` correspond à la fonction de répartition d'une *var* X suivant la loi $\mathcal{G}_*(p)$, *i.e.*

   $$F(k) = \mathbb{P}(X \leq k).$$

   En faisant plusieurs tests avec plusieurs valeurs de (k, p), on constate que les commandes `pgeom(k, p)` et `1 - (1 - p)^(k + 1)` donnent le même résultat. Cela vient du résultat théorique suivant: pour tout $k \in \mathbb{N}$,

   $$\begin{aligned} F(k) &= \mathbb{P}(X \leq k) = \sum_{i \in X(\Omega) \cap]-\infty, k]} \mathbb{P}(X = i) = \sum_{i=0}^{k} (1 - p)^i p \\ &= p \sum_{i=0}^{k} (1 - p)^i = p \frac{1 - (1 - p)^{k+1}}{1 - (1 - p)} = 1 - (1 - p)^{k+1}, \end{aligned}$$

   ce qui correspond à la commande `1 - (1 - p)^(k + 1)`. D'où l'équivalence des commandes.

(b) `dgeom(k, p)` et `pgeom(k, p) - pgeom(k - 1, p)`: En faisant plusieurs tests avec plusieurs valeurs de (k, p), on constate que les commandes `pgeom(k, p) - pgeom(k-1, p)` et `dgeom(k, p)` donnent le même résultat. Cela vient du résultat théorique suivant: pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}(X = k) + \left(\sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{P}(X = i) - \sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{P}(X = i)\right) \\ &= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X = i) - \sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{P}(X = i) = \mathbb{P}(X \leq k) - \mathbb{P}(X \leq k - 1).\end{aligned}$$

Solution 3. Soit X une *var* suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(10, 0.8)$, *i.e.*

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{10}{k} 0.8^k (1 - 0.8)^{10-k}, \qquad k \in \{0, \ldots, 10\}.$$

1. Écrire une nouvelle fonction R équivalente à la fonction `dbinom` :

```
LoiBinom = function(k, n, p) { choose(n, k) * p^k * (1 - p)^(n - k) }
```

2. Montrer que $\mathbb{P}(\{\text{X est paire}\}) > \mathbb{P}(\{\text{X est impaire}\})$: On a $\{\text{X est paire}\} = \bigcup_{k=0}^{5} \{X = 2k\}$, donc

$$\mathbb{P}(\{\text{X est paire}\}) = \sum_{k=0}^{5} \mathbb{P}(X = 2k).$$

La commande correspondante est:

```
sum(dbinom(c(0, 2, 4, 6, 8, 10), 10, 0.8))
```

qui renvoie : `[1] 0.5030233`

Comme $\mathbb{P}(\{\text{X est paire}\}) + \mathbb{P}(\{\text{X est impaire}\}) = 1$, cela entraîne $\mathbb{P}(\{\text{X est paire}\}) > \mathbb{P}(\{\text{X est impaire}\})$.

3. Déterminer le plus petit entier k tel que $\mathbb{P}(X \leq k) \geq 0.87$:

`qbinom(0.87, 10, 0.8)` renvoie : `[1] 9`

On peut vérifier ce résultat en remarquant que `pbinom(9, 10, 0.8)` renvoie : `[1] 0.8926258` et `pbinom(8, 10, 0.8)` renvoie : `[1] 0.6241904`, lesquelles encadre la valeur 0.87. Donc 9 est bien l'entier recherché.

4. Vérifier numériquement que $\mathbb{E}(X) = 8$ $(= np)$:

```
k = 0:10
```

`sum(k * dbinom(k, 10, 0.8))` renvoie : `[1] 8`

$\mathbb{V}(X) = 1.6$ $(= np(1 - p))$:

```
sum(k^2 * dbinom(k, 10, 0.8)) - (sum(k * dbinom(k, 10, 0.8)))^2
```

renvoie : `[1] 1.6`

Solution 4. Est-ce que les commandes `sum(dpois(1:12, 9))` et `ppois(12, 9)` donnent le même résultat ? Expliquer :

Non, il manque la probabilité $\mathbb{P}(X = 0)$ avec X suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(9)$ dans la première commande pour qu'elle corresponde à la seconde.

Par exemple, les commandes suivantes donne le même résultat :

`sum(dpois(0:12, 9))` et `ppois(12, 9)` renvoient : `[1] 0.8757734`

`sum(dpois(1:12, 9))` et `ppois(12, 9) - dpois(0, 9)` renvoient : `[1] 0.87565`

Solution 5. Soit X une *var* suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(5)$, *i.e.*

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-5}\frac{5^k}{k!}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

1. Écrire une nouvelle fonction R équivalente à la fonction `dpois` :

   ```
   LoiPois = function(k, lambda) { exp(-lambda) * (lambda^k / factorial(k)) }
   ```

2. Est-ce que $\mathbb{P}(X \leq 8) \geq 0.95$?

   `qpois(0.95, 5)` renvoie : `[1] 9`, ce qui signifie que 9 est le plus petit entier k tel que $\mathbb{P}(X \leq k) \geq 0.95$. Donc la réponse est non.

   (On peut vérifier directement: `sum(dpois(0:8, 5))` renvoie : `[1] 0.9319064`, donc inférieur à 0.95).

3. Quelle est la valeur la plus probable pour X ? (cette valeur est appelée le mode)

   La commande qui donne le mode de X est

   `which.max(dpois(0:100, 5))`

   renvoie : `[1] 5`, soit la 5-ème composante du vecteur $k = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots, 100)$, donc $k = 4$.

Solution 6. Soit X une *var* dont la loi est donnée par

$$\mathbb{P}(X = 10^{i-1}) = \frac{i}{28}, \qquad i \in \{1, \ldots, 7\}.$$

1. Préciser $X(\Omega)$: on a $X(\Omega) = \{1, 10, 100, \ldots, 1000000\}$,

2. Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}(X)$ et $\sigma(X)$ avec le logiciel R (on trouve $\sigma(X) = 421225$) :

   `k = 10^(0:6)`

   `probas = (1:7) / 28`

   $\mathbb{E}(X)$:

   `sum(k * probas)` renvoie : `[1] 273368.6`

   $\mathbb{V}(X)$:

   `sum(k^2 * probs) - (sum(k * probs))^2` renvoie : `[1] 177430462850`

   $\sigma(X)$:

   `sqrt(sum(k^2 * probs) - (sum(k * probs))^2)` renvoie : `[1] 421225`

Solution 7. En utilisant des fonctions déjà implémentées dans R, tracer le graphe de la fonction de répartition d'une *var* X suivant

- la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(0.4)$:

  `plot(0:2, pbinom(0:2, 1, 0.4), type = "s")`

- la loi binomiale $\mathcal{B}(10, 0.5)$:

  `plot(-1:11, pbinom(-1:11, 10, 0.5), type = "s")`

  (Une solution plus élégante :

  `F = stepfun(-1:11, c(0, pbinom(-1:11, 10, 0.5)))`

  `plot(F, vertical = FALSE)`

)

- la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(15, 11, 6)$:

  `plot(-1:12, phyper(-1:12, 15, 11, 6), type = "s")`

- la loi de Poisson $\mathcal{P}(2)$:

  `plot(0:15, ppois(0:15, 2), type = "s")`

Solution 8. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0, 1[$ et X une *var* suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(15, 0.3)$.

1. Calculer les probabilités $\mathbb{P}(X = k)$, $k \in \{0, \ldots, 15\}$, avec la commande `dbinom` :

   `loiX = dbinom(0:15, 15, 0.3)`

2. Représenter le graphe de la loi de X à l'aide d'un diagramme à bâtons :

   `plot(loiX, type = "h", lwd = 10, col = "blue", lend = "square")`

   ou

   `barplot(loiX, names.arg = k, col = "blue")`

3. Quelle est le mode de X ?

   `mode = which.max(loiX)`

   `mode`

   renvoie : `[1] 5`, ce qui correspond à la 5-ème valeur de $\{0, \ldots, 15\}$, soit $k = 4$.

   Pour afficher la valeur de la probabilité que X soit égale au mode, la commande est `loiX[mode]` qui renvoie : `[1] 0.2186231`

4. Calculer $\mathbb{P}(3 \leq X \leq 9)$, $\mathbb{P}(X \leq 10)$ et $\mathbb{P}(X \geq 4)$:

   - en utilisant la commande `pbinom`:
     $\mathbb{P}(3 \leq X \leq 9) = \mathbb{P}(X \leq 9) - \mathbb{P}(X < 3) = \mathbb{P}(X \leq 9) - \mathbb{P}(X \leq 2)$:
     `pbinom(9, 15, 0.3) - pbinom(2, 15, 0.3)` renvoie : `[1] 0.8695198`
     ou
     `diff(pbinom( c(2, 9), 15, 0.3))` renvoie : `[1] 0.8695198`

$\mathbb{P}(X \leq 10)$:
`pbinom(10, 15, 0.3)` renvoie : `[1] 0.9993278`
$\mathbb{P}(X \geq 4)$:
`1 - pbinom(3, 15, 0.3)` renvoie : `[1] 0.7031321`

- en utilisant la commande `dbinom`:
  $\mathbb{P}(3 \leq X \leq 9)$:
  `sum(dbinom(3:9, 15, 0.3))` renvoie : `[1] 0.8695198`
  $\mathbb{P}(X \leq 10)$:
  `sum(dbinom(0:10, 15, 0.3))` renvoie : `[1] 0.9993278`
  $\mathbb{P}(X \geq 4)$:
  `sum(dbinom(4:15, 15, 0.3))` renvoie : `[1] 0.7031321`

5. Calculer et représenter la fonction de répartition (utiliser la fonction `pbinom`) :
```
plot(0:15, pbinom(0:15, 15, 0.3), type = "s")
```

Solution 9. Soit X une *var* suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(5)$. Reprendre les questions de l'exercice précédent :

```
loiX = dpois(0:15, 5)
barplot(loiX, names.arg = 0:15, col = "blue")
mode = which.max(loiX)
```

`mode` renvoie : `[1] 5`, soit la valeur $k = 4$,

`loiX[mode]` renvoie : `[1] 0.1754674`, qui est donc la probabilité maximale que X soit égale à une de ses valeurs,

`ppois(9, 5) - ppois(2, 5)` renvoie : `[1] 0.8435199`
`ppois(10, 5)` renvoie : `[1] 0.9863047`
`1 - ppois(3, 5)` renvoie : `[1] 0.7349741`
```
plot(0:15, ppois(0:15, 5), type = "s")
```

Solution 10. Reproduire et analyser les commandes suivantes :

```
x = 0:30
y1 = dpois(x, 2)
y2 = dpois(x, 5)
y3 = dpois(x, 10)
y4 = dpois(x, 15)
par(mfrow = c(2, 2))
plot(x, y1, type = "h", lwd = 4, lend = 1)
plot(x, y2, type = "h", lwd = 4, lend = 1)
plot(x, y3, type = "h", lwd = 4, lend = 1)
plot(x, y4, type = "h", lwd = 4, lend = 1)
```

Le résultat est un graphique divisé en 4 figures représentant chacune un diagramme à bâtons de la loi d'une *var* suivant une loi de Poisson. Pour la première, c'est $\mathcal{P}(2)$, la deuxième, $\mathcal{P}(5)$, la troisième, $\mathcal{P}(10)$, et la dernière, $\mathcal{P}(15)$.