TP n° 3 : *Var* discrètes

Exercice 1. On considère la commande `exp(-3) * 3^4 / factorial(4)`.

1. Préciser à quelle loi de probabilité elle correspond et ce qu'elle renvoie.
2. Donner la commande prédéfinie de R équivalente.

Exercice 2. Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. La commande `dgeom(k, p)` donne la probabilité qu'une *var* X suivant la loi géométrique modifiée en 0 $\mathcal{G}_*(p)$ soit égale à k, *i.e.*

$$\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^k p, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

1. Écrire une nouvelle fonction R équivalente à la fonction `dgeom`.
2. On se fixe $p = 0.35$. Calculer $\mathbb{P}(X \leq 3)$, $\mathbb{P}(X \geq 4)$ et $\mathbb{P}(X \neq 5)$.
3. Est-ce que les commandes suivantes sont équivalentes ?
   (a) `pgeom(k, p)` et `1 - (1 - p)^(k + 1)`,
   (b) `dgeom(k, p)` et `pgeom(k, p) - pgeom(k - 1, p)`.

Exercice 3. Soit X une *var* suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(10, 0.8)$, *i.e.*

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{10}{k} 0.8^k (1-0.8)^{10-k}, \qquad k \in \{0, \ldots, 10\}.$$

1. Écrire une nouvelle fonction R équivalente à la fonction `dbinom`.
2. Montrer que $\mathbb{P}(\{\text{X est paire}\}) > \mathbb{P}(\{\text{X est impaire}\})$.
3. Déterminer le plus petit entier k tel que $\mathbb{P}(X \leq k) \geq 0.87$.
4. Vérifier numériquement que $\mathbb{E}(X) = 8$ $(= np)$ et $\mathbb{V}(X) = 1.6$ $(= np(1-p))$.

Exercice 4. Est-ce que les commandes `sum(dpois(1:12, 9))` et `ppois(12, 9)` donnent le même résultat ? Expliquer.

Exercice 5. Soit X une *var* suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(5)$, *i.e.*

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-5}\frac{5^k}{k!}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

1. Écrire une nouvelle fonction R équivalente à la fonction `dpois`.
2. Est-ce que $\mathbb{P}(X \leq 8) \geq 0.95$?
3. Quelle est la valeur la plus probable pour X ? (cette valeur est appelée le mode).

Exercice 6. Soit X une *var* dont la loi est donnée par

$$\mathbb{P}(X = 10^{i-1}) = \frac{i}{28}, \qquad i \in \{1, \ldots, 7\}.$$

1. Préciser $X(\Omega)$.
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}(X)$ et $\sigma(X)$ avec le logiciel R (on trouve $\sigma(X) = 421225$).

Exercice 7. En utilisant des fonctions déjà implémentées dans R, tracer le graphe de la fonction de répartition d'une *var* X suivant

- la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(0.4)$,
- la loi binomiale $\mathcal{B}(10, 0.5)$,
- la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(15, 11, 6)$,
- la loi de Poisson $\mathcal{P}(2)$,

(utiliser `plot` *avec l'option* `type = "s"`*).*

Exercice 8. Soit X une *var* suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(15, 0.3)$.

1. Calculer les probabilités $\mathbb{P}(X = k)$, $k \in \{0, \ldots, 15\}$, avec la commande `dbinom`.
2. Représenter le graphe de la loi de X à l'aide d'un diagramme à bâtons.
3. Quelle est le mode de X ?
4. Calculer $\mathbb{P}(3 \leq X \leq 9)$, $\mathbb{P}(X \leq 10)$ et $\mathbb{P}(X \geq 4)$ en utilisant la fonction `pbinom`. Retrouver ces résultats avec la fonction `dbinom`.
5. Calculer et représenter la fonction de répartition de X (utiliser la fonction `pbinom`).

Exercice 9. Soit X une *var* suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(5)$. Reprendre les questions de l'exercice précédent.

Exercice 10. Reproduire et analyser les commandes suivantes :

```
x = 0:30
y1 = dpois(x, 2)
y2 = dpois(x, 5)
y3 = dpois(x, 10)
y4 = dpois(x, 15)
par(mfrow = c(2, 2))
plot(x, y1, type = "h", lwd = 4, lend = 1)
plot(x, y2, type = "h", lwd = 4, lend = 1)
plot(x, y3, type = "h", lwd = 4, lend = 1)
plot(x, y4, type = "h", lwd = 4, lend = 1)
```