TP n° 4 : *Var* discrètes II

Exercice 1. Certaines lois de *var* peuvent être approchées par d'autres lois plus simples à calculer. Notamment, la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(l, m, n)$ peut être approchée par la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ avec $p = l/(l+m)$ et $n \leq 0.1(l+m)$, *i.e.*

$$\mathcal{H}(l, m, n) \approx \mathcal{B}(n, p), \qquad p = l/(l+m), \qquad n \leq 0.1(l+m).$$

L'objectif de cet exercice est de visualiser cette approximation avec le logiciel R.

1. Calculer les probabilités $\mathbb{P}(X = k)$ avec $k \in \{0, \ldots, 20\}$ lorsque X est une *var*
   - suivant la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(1000, 500, 20)$,
   - suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(20, 1000/1500)$.

   Donner un exemple de schéma d'urnes dans lesquels ces 2 lois interviennent.
2. Séparer l'écran graphique en 2 avec la commande `par(mfrow = c(2, 1))` : dans la fenêtre 1, représenter le graphe de la loi $\mathcal{H}(1000, 500, 20)$ et dans la fenêtre 2, celui de la loi $\mathcal{B}(20, 1000/1500)$.
3. Reproduire et analyser les commandes suivantes :

```
approx.fun = function(k, Ne, Nm, n, p) {
barplot(rbind(dhyper(k, Ne, Nm, n), dbinom(k, n, p)),
col = c(1,2), legend = c("Hypergéométrique", "Binomiale"),
beside = T, names = k, xlab = "k", ylab = "Proba P(X=k)")
abline(h = 0)
}
par(mfrow = c(3 ,1))
approx.fun(0:20, 1000, 500, 20, 2 / 3)
approx.fun(0:10, 20, 30, 10, 2 / 5)
approx.fun(0:10, 10, 15, 10, 2 / 5)
```

Exercice 2. La loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ peut être approchée par la loi de Poisson $\mathcal{P}(np)$ si $n \geq 31$ et $np \leq 10$, *i.e.*

$$\mathcal{B}(n, p) \approx \mathcal{P}(np), \qquad n \geq 31, \ np \leq 10.$$

L'objectif de cet exercice est d'étudier cette approximation avec le logiciel R.

1. Représenter les graphes des lois suivantes à l'aide de diagrammes à bâtons :

$$\mathcal{B}(10, 0.5), \qquad \mathcal{B}(20, 0.25), \qquad \mathcal{B}(50, 0.1), \qquad \mathcal{B}(100, 0.05), \qquad \mathcal{P}(5).$$

2. Pour chaque $n \in \{5, 10, 20, 50, 100\}$, évaluer le maximum de l'erreur commise lorsque que l'on approche la loi binomiale par la loi de Poisson, *i.e.* calculer

$$E_n = \max_{k \in \{0,\ldots,n\}} |\mathbb{P}(X = k) - \mathbb{P}(Y = k)|,$$

où X est une *var* suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, 5/n)$ et Y est une *var* suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(5)$. Commenter les résultats obtenus.

3. *Application 1.* Suite à une campagne de vaccination contre le paludisme, on estime à 2% la proportion de personnes qui seraient pourtant atteintes de la maladie.

   Soit X la *var* égale au nombre de personnes malades dans un petit village de 100 habitants.

   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Calculer la probabilité de constater au moins une personne malade.
   (c) Calculer la probabilité de constater au plus 10 personnes malades.
   (d) Refaire (b) et (c) en utilisant une approximation de la loi de X par une loi de Poisson.
   (e) Quelle est la qualité de l'approximation ?

4. *Application 2.* Une entreprise fabrique, en grande quantité, des tiges métalliques cylindriques pour l'industrie. Leur longueur et leur diamètre sont exprimés en millimètres. Dans un lot, 3% des tiges ne sont pas conformes pour la longueur. On prélève au hasard 50 tiges de ce lot pour vérification. Le lot est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à des tirages avec remise. Soit la *var* X qui, à tout prélèvement de 50 tiges, associe le nombre de tiges non conformes pour la longueur.

   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Calculer la probabilité qu'au plus deux tiges ne soient pas conformes pour la longueur.
   (c) Refaire (b) en utilisant une approximation de la loi de X.
   (d) Quelle est la qualité de l'approximation ?

Exercice 3. On pose

$$p_{i,j} = \frac{1}{(i+1)^{j+1}}, \qquad (i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2.$$

On admet que $(p_{i,j})_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ caractérise la loi d'un couple de *var* discrètes (X, Y) :

- pour tout $(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on a $p_{i,j} \geq 0$,
- $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_{i,j} = 1$.

1. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{1000} \sum_{j=1}^{1000} p_{i,j} \approx 0.999.$$

2. Représenter graphiquement $(p_{i,j})_{(i,j)\in\{1,\ldots,5\}^2}$.