

TP n° 5 : Simulations de *var* discrètes I

Exercice 1. La fonction préimplémentée `sample` prélève successivement un nombre donné d'éléments d'un ensemble de cardinal fini, avec ou sans remise. Plus précisément :

```
sample(x, size, replace = FALSE, prob = NULL)
```

où:

- `x`: Décrit l'ensemble dans lequel on va échantillonner. Il s'agit soit d'un vecteur, soit d'un entier k . Dans ce dernier cas, l'ensemble considéré sera tous les entiers allant de 1 à k .
- `size`: Un entier positif ou nul donnant le nombre d'élément à tirer. Par défaut, il s'agit du cardinal de l'ensemble décrit par `x`.
- `replace` (ou `rep`): Un booléen : `TRUE` (ou `T`) signifie avec remise, et `FALSE` (ou `F`), sans remise.
- `prob`: Un vecteur de poids de probabilités d'obtenir les éléments de l'ensemble à partir duquel on échantillonne.

Considérons dans un premier temps un dé équilibré. On effectue 500 lancers, puis on regarde l'effectif des résultats :

```
resdé = sample(6, 500, replace = T)
table(resdé)
```

On réitère l'expérience, mais cette fois avec un dé pipé (une chance sur deux de tomber sur la valeur 1) :

```
resdépipé = sample(6, 500, replace = T, prob = c(0.5, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1))
table(resdépipé)
```

Pour comparer les deux résultats, on peut réaliser le graphique suivant :

```
titre1 = "Fréquences obtenues pour 500 lancers de dé équilibré"
titre2 = "Fréquences obtenues pour 500 lancers de dé pipé"
par(mfrow = c(1, 2))
barplot(table(resdé) / 500, main = titre1)
barplot(table(resdépipé) / 500, main = titre2)
```

Exercice 2. Écrire une commande R qui renvoie le résultat

1. du lancer d'un dé.
2. du lancer de 2 dés.
3. de la somme des résultats du lancer de 2 dés.
4. du tirage du loto (5 numéros parmi 49).

Exercice 3. Soit X une *var* dont la loi est donnée par

$$\mathbb{P}(X = 0) = 0.2, \quad \mathbb{P}(X = 2) = 0.5, \quad \mathbb{P}(X = 5) = 0.3.$$

Simuler 1000 réalisations de X et préciser les effectifs associés aux valeurs de X .

Exercice 4. Une urne contient $p + q$ boules, dont p rouges et q noires. Créer une fonction `Urne` à 3 arguments (k, p, q) qui modélise le résultat de k tirages sans remise d'une boule de l'urne. Par exemple, la commande `Urne(6, 8, 5)` renvoie : `[1] "Rouge" "Noire" "Noire" "Rouge" "Noire" "Rouge"`.

Exercice 5. Lorsqu'on effectue n tirages indépendants d'une même expérience aléatoire, on appelle fréquence du résultat k le rapport entre le nombre de fois où k est tiré, et n .

Par exemple, si on jette 7 fois un dé cubique équilibré, avec pour résultats : 1; 1; 5; 2; 6; 5; 3, alors la fréquence de 5 est $2/7$, celle de 4 est 0.

Écrire une fonction `Freq` à un paramètre n qui renvoie la fréquence de 5 lors de n tirages indépendants d'un dé cubique équilibré. Comparer les fréquences pour $n \in \{10, 100, 1000\}$, avec la probabilité (théorique) d'obtenir un 5 lorsqu'on lance un dé.

Exercice 6. Une urne contient 15 boules, dont 5 blanches et 10 noires. On considère les deux expériences suivantes :

- E1: On tire successivement 10 boules dans l'urne, avec remise,
 - E2: On tire successivement 10 boules dans l'urne, sans remise.
1. Simuler une réalisation de chacune des deux expériences avec la fonction `sample`. On représentera une boule blanche par le chiffre 1 et une boule noire par le chiffre 0.
 2. On s'intéresse à la *var* X égale au nombre de boules blanches tirées lors l'expérience E1, et à la *var* Y , l'analogue mais avec l'expérience E2.
 - (a) Simuler 500 réalisations de chacune de ces *var* en utilisant la fonction `sample`.
 - (b) Comparer, suivant le type d'épreuve, le diagramme en barre des fréquences observées avec la distribution des lois binomiales et hypergéométriques correspondantes.

Exercice 7. On considère la marche aléatoire suivante: un mobile est positionné à l'origine d'un axe. À chaque étape, il se déplace d'une distance de longueur 1 vers la droite ou la gauche avec la probabilité 0.5 pour chaque direction. Il effectue n étapes au total. Soit X_i la position du mobile à l'étape i (on pose $X_0=0$).

Simuler une réalisation du vecteur de *var* (X_0, X_1, \dots, X_n) (on pourra utiliser la fonction `cumsum` qui donne la somme cumulée d'un vecteur. Par exemple, la commande `cumsum(c(2, 2, 2, 3))` renvoie : `[1] 2 4 6 9`).

Exercice 8. On lance 5 dés cubiques équilibrés, puis on relance ceux qui n'ont pas fait 6, et ainsi de suite jusqu'à ce que les 5 dés affichent 6.

Simuler une réalisation de cette expérience aléatoire en affichant les chiffres obtenus après chaque lancers et le nombre de lancers total (on pourra utiliser une boucle `while` et la commande `sum(x != 6)` qui calcule le nombre de composantes d'un vecteur \mathbf{x} différentes de 6).