TP n^o 6 : Simulations de *var* discrètes II

Exercice 1. Donner une commande R équivalente à `sum(sample(c(0, 0, 1), 15, replace = T))`.

Exercice 2. On rappelle l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev: Soit X une *var* admettant un moment d'ordre 2. Alors, pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\epsilon^2}.$$

L'objectif de cet exercice est d'illustrer cette inégalité avec un exemple.

Soit X une *var* suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(3)$.

1. Donner, sans démonstration, $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
2. Simuler un échantillon de taille 1000 de X.
3. Une approximation de $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \epsilon)$ est donnée par la proportion $R(\epsilon)$ de valeurs simulées vérifiant $|X - \mathbb{E}(X)| \geq \epsilon$. Évaluer celle-ci avec $\epsilon = 4$, puis comparer avec $\mathbb{V}(X)/\epsilon^2$.
4. Reproduire et analyser les commandes suivantes :

```
N = 1000
x = rpois(N, 3)
epsilon = 1:50
proba = rep(0, 50)
for (i in 1:50) {
d = abs(x - 3)
proba[i] = sum(d >= epsilon[i]) / N
}
sup = 3 / epsilon^2
plot(epsilon, sup, type = "l", ylim = c(0, 1))
lines(epsilon, proba, col = "red")
```

5. *Question complémentaire.* Écrire une fonction $g(\epsilon) = \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \epsilon)$, $\epsilon \in \mathbb{N}^*$, sans approximation. Comparer graphiquement $g(\epsilon)$ avec $\mathbb{V}(X)/\epsilon^2$ pour $\epsilon \in \{1, \ldots, 50\}$.

Exercice 3. Soit X une *var* suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(15, 0.3)$.

1. Simuler un échantillon de taille 500 de X. On note $x_1, \ldots, x_{500}$ les valeurs simulées. Enregistrer les sous forme d'un vecteur de taille 500.
2. Représenter cet échantillon : tracer le nuage de points $\{(i, x_i);\ i \in \{1, \ldots, 500\}\}$.

3. Calculer la fréquence des différentes observations $\{0, \ldots, 15\}$ en utilisant la fonction `table`. On note $f_0, \ldots, f_{15}$ ces fréquences. Enregistrer les sous forme d'un vecteur.
4. Représenter $f_0, \ldots, f_{15}$ à l'aide d'un diagramme à bâtons.
5. Comparer la distribution de X et $f_0, \ldots, f_{15}$.
6. Calculer et représenter graphiquement les fréquences cumulées (utiliser la fonction `cumsum`).
7. Comparer le graphe de la fonction de répartition de X et la courbe des fréquences cumulées.
8. Calculer la moyenne empirique de l'échantillon simulé.
9. Comparer la moyenne empirique et l'espérance de la loi binomiale.
10. Calculer la variance empirique de l'échantillon simulé.
11. Comparer la variance empirique et la variance de la loi binomiale.

Exercice 4. Soient X et Y deux *var* indépendantes telles que X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(5)$ et Y suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(3)$. Alors on sait que $Z = X + Y$ suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(5 + 3)$.

1. Illustrer ce résultat en simulant des *var* et en utilisant la commande `qqplot`.
2. Montrer directement ce résultat en utilisant la commande `convolve` (avec `type = "o"`).

Exercice 5. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* de loi commune la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. On pose $\overline{X}_n = (1/n)\sum_{i=1}^{n} X_i$. L'objectif de cet exercice est d'illustrer la convergence en probabilité de $(\overline{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers p (justifiée par la loi faible des grands nombres). On fixe $p = 0.5$ et $n = 5$.

1. Quelle est la loi de $n\overline{X}_n$?
2. Simuler un échantillon de taille 100 de $n\overline{X}_n$.
3. Déduire un échantillon de taille 100 de $\overline{X}_n$.
4. Évaluer la proportion $R_n(\epsilon)$ de valeurs simulées qui vérifient $|\overline{X}_n - p| \geq \epsilon$ avec $\epsilon = 0.1$.
5. Refaire les calculs de $R_n(\epsilon)$ avec $\epsilon = 0.1$ et $n \in \{10, 25, 50, 75, 100, 150, 200, 500\}$.
6. Refaire les calculs de $R_n(\epsilon)$ avec $\epsilon = 0.01$ et $n \in \{10, 100, 200, 500, 1000, 5000, 10000, 50000\}$.
7. Commenter les résultats obtenus.

Exercice 6. Reproduire et analyser les commandes suivantes :

```
n = 5000
x = rbinom(n, 10, 0.21)
y = cumsum(x) / (1:n)
plot(y, type = "l")
abline(h=2.1, col = "red")
```

Quel résultat célèbre est illustré ?