

TP n° 7 : Var à densité

Exercice 1. On s'intéresse à la durée de vie d'un certain type de voiture. Soit X la *var* égale à la durée de vie en années d'une de ces voitures. On suppose que X suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\frac{1}{10})$, *i.e.* de densité

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Écrire une nouvelle fonction R équivalente à `dexp` (on pourra utiliser une structure de contrôle `if ... else` pour que celle-ci soit égale à 0 quand $x < 0$).
2. Vérifier numériquement que $\int_0^{100} f(x)dx \simeq 1$.
3. Séparer l'écran graphique en 2 : dans la fenêtre 1, représenter le graphe de la densité f et, dans la fenêtre 2, celui de la fonction de répartition de X .
4. Calculer la probabilité que la durée de vie d'une voiture dépasse 10.2 ans.

Exercice 2. Soit X une *var* suivant la loi gamma $\Gamma(5, 1)$, *i.e.* de densité

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{24}x^4e^{-x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Écrire une nouvelle fonction R équivalente à `dgamma`.
2. Vérifier numériquement que $\int_0^{100} f(x)dx \simeq 1$.
3. Évaluer la fonction de répartition de X , *i.e.* $F(x)$, pour $x \in \{2, \dots, 10\}$.
4. Déterminer le réel x vérifiant $\mathbb{P}(X \leq x) = 0.92$.

Exercice 3. Soit X une *var* suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$, *i.e.* de densité

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1. Écrire une nouvelle fonction R équivalente à la fonction `dnorm`.
2. Vérifier numériquement que $\int_{-100}^{100} f(x)dx \simeq 1$.
3. Séparer l'écran graphique en 2 : dans la fenêtre 1, représenter le graphe de la densité f et, dans la fenêtre 2, celui de la fonction de répartition de X .
4. Calculer $\mathbb{P}(X \leq 2.2)$, $\mathbb{P}(X \geq 1.7)$, $\mathbb{P}(0.2 \leq X < 1.4)$ et $\mathbb{P}(|X| \leq 1.96)$.
5. Déterminer le réel x vérifiant $\mathbb{P}(X \leq x) = 0.98$.

Exercice 4. On suppose que le poids d'un foie gras est une *var* X suivant la loi normale $\mathcal{N}(550, 100^2)$, l'unité étant le gramme. Quelle est la probabilité qu'un foie gras pèse

- moins de 650 grammes ?
- plus de 746 grammes ?
- entre 550 grammes et 600 grammes ?

Exercice 5. Soit X une *var* suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. La fonction de répartition de X , *i.e.* $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$, avec $x \geq 0$, peut s'écrire comme

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{\prod_{m=0}^n (2m+1)}.$$

Utiliser cette expression pour écrire une nouvelle fonction R équivalente à la fonction `pnorm` (*on tronquera la somme infinie à la valeur 50*).

Exercice 6. Reproduire et analyser les commandes suivantes :

```
curve(dweibull(x, 2, 2), -5, 5, col = "red")
curve(dt(x, 3), -5, 5, col = "blue", add = T)
curve(df(x, 2, 4), -5, 5, col = "orange", add = T)
curve(dcauchy(x, 2, 3), -5, 5, col = "magenta", add = T)
```

Exercice 7. La loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ peut être approchée par la loi normale $\mathcal{N}(np, np(1-p))$ si $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$, *i.e.*

$$\mathcal{B}(n, p) \approx \mathcal{N}(np, np(1-p)), \quad n \geq 30, \quad np \geq 5, \quad n(1-p) \geq 5.$$

L'objectif de cet exercice est d'étudier cette approximation avec le logiciel R.

1. Commenter le résultat des commandes suivantes :

```
plot(0:100, dbinom(0:100, 100, 0.5), type = "h", xlim = c(20, 80))
curve(dnorm(x, 100 * 0.5, sqrt(100 * 0.5 * (1 - 0.5))), col = "red", add = T)
```

2. Pour chaque $n \in \{5, 10, 20, 50, 100\}$, évaluer le maximum de l'erreur commise lorsque que l'on approche la loi binomiale par la loi de Poisson (avec correction de continuité), *i.e.* calculer

$$E_n = \max_{k \in \{0, \dots, n\}} |\mathbb{P}(X = k) - \mathbb{P}(k - 1/2 \leq Y \leq k + 1/2)|,$$

où X est une *var* suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, 5/n)$ et Y est une *var* suivant la loi normale $\mathcal{N}(5, 5(1-5/n))$. Commenter les résultats obtenus.

3. *Application.* Un disquaire a observé qu'un client sur 20 achète un cd de Jazz. En un mois, 800 clients se présentent au guichet du magasin de disques. Soient X la *var* égale au nombre de clients qui achètent un cd de Jazz durant ce mois.

- (a) Déterminer la loi de X .
- (b) Par quelle loi qui peut-on approcher la loi de X ? Donner une approximation de $\mathbb{P}(35 \leq X \leq 45)$ (avec correction de continuité), puis comparer avec la vraie valeur.