TP n° 8 : Simulations de *var* à densité

Exercice 1. Donner une commande R équivalente à `sum(runif(10) < 0.3)`.

Exercice 2. Un échantillon de taille 50 d'une *var* X est présenté dans le tableau suivant :

0.498	2.409	0.577	5.579	2.507	1.695	2.396	1.528	0.365	0.388
3.971	0.984	1.157	12.283	0.052	3.939	9.631	3.727	2.684	0.513
2.540	1.509	1.542	4.771	1.478	4.784	3.266	6.677	3.034	2.426
2.595	0.472	4.074	4.530	2.192	0.418	1.237	1.929	0.729	0.127
6.429	2.072	7.844	0.584	1.769	0.838	1.590	1.554	5.853	4.342

1. Représenter ces données par un histogramme des fréquences.
2. Tracer, sur le graphique précédent, les 3 densités de la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda \in \{0.33, 0.5, 3\}$. Quelle est la densité la plus adaptée ?
3. Simuler un échantillon de taille 50 d'une *var* Y suivant la loi $\mathcal{E}(0.33)$ et représenter le avec un histogramme des fréquences.

Exercice 3. Soient X_1 et X_2 deux *var* indépendantes. Illustrer les résultats ci-dessous avec la commande `qqplot`.

$X_i \sim$	$\mathcal{E}(\lambda)$	$\Gamma(m_i, \lambda)$	$\mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$	$\chi^2(\nu_i)$
$X_1 + X_2 \sim$	$\Gamma(2, \lambda)$	$\Gamma(m_1 + m_2, \lambda)$	$\mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$	$\chi^2(\nu_1 + \nu_2)$
Numérique	$\lambda = 3.8$	$m_1 = m_2 = 4.2,\ \lambda = 2.1$	$\mu_1 = \mu_2 = 1.6,\ \sigma_1 = \sigma_2 = 1.5$	$\nu_1 = \nu_2 = 3.2$

Exercice 4. Soient X et Y deux *var* indépendantes. Illustrer les résultats ci-dessous avec la commande `qqplot`.

- Caractérisation de la loi du chi-deux $\chi^2(2)$: Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$, alors
$$X^2 + Y^2 \sim \chi^2(2).$$
- Caractérisation de la loi de Student $\mathcal{T}(\nu)$: Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $Y \sim \chi^2(\nu)$, alors
$$\frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{\nu}}} \sim \mathcal{T}(\nu).$$
Prendre $\nu = 3.9$.
- Caractérisation de la loi de Fisher $\mathcal{F}(\nu_1, \nu_2)$: Si $X \sim \chi^2(\nu_1)$ et $Y \sim \chi^2(\nu_2)$, alors
$$\frac{\frac{X}{\nu_1}}{\frac{Y}{\nu_2}} = \frac{\nu_2 X}{\nu_1 Y} \sim \mathcal{F}(\nu_1, \nu_2).$$
Prendre $(\nu_1, \nu_2) = (2.1, 8.3)$.

Exercice 5.

1. Reproduire et comprendre l'enjeu des commandes suivantes :

```
n = 5000
par(mfrow = c(2, 1))
x = rnorm(n)
y = cumsum(x) / (1:n)
plot(y, type = "l")
abline(h = 0, col = "red")
xc = rcauchy(n, 0, 1)
yc = cumsum(xc) / (1:n)
plot(yc, type = "l")
abline(h = 0, col = "red")
```

2. Quel résultat célèbre est illustré dans le premier graphique ?
3. Comment expliquer le résultat du deuxième graphique ?

Exercice 6. Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* de loi commune la loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$, *i.e.* de densité

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\overline{X}_n = (1/n)\sum_{i=1}^{n} X_i$. Expliquer pourquoi, pour n suffisamment grand, on a l'approximation suivante :

$$\overline{X}_n \approx \mathcal{N}\left(0.5, \frac{1}{12n}\right).$$

2. Reproduire et analyser les commandes suivantes :

```
X = matrix(runif(500 * 10), ncol = 10, nrow = 500)
x = apply(X, 1, mean)
par(mfrow = c(1, 2))
hist(x, main = "Taille d'échantillon 10", prob = T)
curve(dnorm(x, 0.5, sqrt(1 / 120)), add = T)
Y = matrix(runif(500 * 50), ncol = 50, nrow = 500)
x = apply(Y, 1, mean)
hist(x, main = "Taille d'échantillon 50", prob = T)
curve(dnorm(x, 0.5, sqrt(1 / 600)), add = T)
```