

TD n° 10 : Couples de variables aléatoires réelles discrètes

Exercice 1. Une urne contient 7 boules dont 3 blanches et 4 noires. On tire au hasard 2 boules de l'urne. Soient

- X la *var* égale à 1 si la première boule est blanche et 0 sinon,
- Y la *var* égale à 1 si la deuxième boule est blanche et 0 sinon.

Déterminer la loi de (X, Y) dans les deux cas suivants :

1. Les tirages sont avec remise.
2. Les tirages sont sans remise.

Exercice 2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0, 1[$, $\lambda > 0$ et X et Y deux *var* discrètes indépendantes telles que

- X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k \in \{0, \dots, n\}.$$

- Y suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$:

$$\mathbb{P}(Y = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Déterminer la loi de (X, Y) .

Exercice 3. Une urne contient 3 boules dont une est numérotée 1 et les autres 2. On tire au hasard et sans remise 2 boules de l'urne. Soient

- X la *var* égale au numéro obtenu au premier tirage,
- Y la *var* égale au numéro obtenu au deuxième.

Déterminer la loi de (X, Y) .

Exercice 4. Une urne contient des boules numérotées de 1 à n : une boule est numérotée 1, 2 boules sont numérotées 2 ..., et n boules sont numérotées n . On tire au hasard 2 boules sans remise. Soient

- X la *var* égale au numéro de la boule obtenu au premier tirage,
- Y la *var* égale au numéro de la boule obtenu au deuxième.

Déterminer la loi de (X, Y) .

Exercice 5. Soit (X, Y) un couple de *var* dont la loi est donnée par

$X \backslash Y$	1	2	3	5
0	0	0	0	0,05
1	0	0,15	0,1	0,05
2	0,05	0,05	0,05	0,15
5	0,1	0	0,15	0,1

Calculer les probabilités suivantes :

$$\mathbb{P}(\{X = 2\} \cap \{Y = 5\}), \quad \mathbb{P}(\{X = 2\} \cap \{Y \leq 2\}),$$

$$\mathbb{P}(\{Y \text{ est paire}\}), \quad \mathbb{P}(X^2 + Y^2 = 2), \quad \mathbb{P}(XY = 3).$$

Exercice 6. Soit (X, Y) un couple de *var* discrètes. On sait qu'il existe un unique réel a tel que la loi de (X, Y) est donnée par

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{a^2}{2}$	0,1
1	a	0,1
2	0,1	0,2

Déterminer a et calculer $\mathbb{P}(\{X \leq 1\} \cap \{Y \leq 1\})$.

Exercice 7. Soit X une *var* dont la loi est donnée par

i	-2	-1	0	1	2
$\mathbb{P}(X = i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

On pose

$$Y = X^2.$$

1. Déterminer la loi de (X, Y) .
2. Déterminer la loi de Y .
3. Est-ce que X et Y sont indépendantes ?

Exercice 8. Une urne contient 4 jetons numérotés de 1 à 4. On tire au hasard et simultanément 2 jetons de l'urne. Soient

- X la *var* égale au plus petit numéro obtenu,
- Y la *var* égale au plus grand.

1. Déterminer la loi de (X, Y) .
2. Déterminer la loi de Y .
3. Est-ce que X et Y sont indépendantes ?