

TD n° 11 : Variables aléatoires réelles à densité I

Exercice 1. Soit X une *var* suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([0, 1])$, *i.e.* de densité :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Calculer les probabilités suivantes :

$$\mathbb{P}(X \geq 4), \quad \mathbb{P}(X \leq 3), \quad \mathbb{P}\left(X = \frac{1}{2}\right).$$

2. Calculer les probabilités suivantes :

$$\mathbb{P}\left(X < \frac{1}{2}\right), \quad \mathbb{P}\left(X \geq \frac{1}{4}\right), \quad \mathbb{P}\left(\frac{1}{4} \leq X < \frac{1}{2}\right).$$

3. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\left(X - \frac{3}{4}\right)^2 \geq \frac{1}{25}\right) = \frac{3}{5}.$$

Exercice 2. Montrer que la fonction g définie ci-dessous est une densité :

$$g(x) = \begin{cases} 9x^2 - 6x + 1 & \text{si } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 3. Soit X une *var* de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{25}x & \text{si } x \in [0, 5], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Vérifier que f est bien une densité.

2. Déterminer la fonction de répartition de X .

3. Calculer $\mathbb{P}(X = 2)$, $\mathbb{P}(1 \leq X < 3)$, $\mathbb{P}(2 < X < 4)$ et $\mathbb{P}(X \leq 3)$.

4. Calculer $\mathbb{P}_{\{X < 3\}}(X > 1)$.

Exercice 4. Soit X une *var* de densité :

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } x \in [-1, 1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Vérifier que f est bien une densité.

2. Calculer $\mathbb{P}(2X^2 \leq X)$.
3. Déterminer la fonction de répartition de X .

Exercice 5. On s'intéresse à la durée de vie d'un certain type de voiture. Soit X la *var* égale à la durée de vie en années d'une de ces voitures. On suppose que X suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\frac{1}{10})$, *i.e.* de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Calculer la probabilité que la durée de vie d'une voiture dépasse 10 ans.
2. Sachant qu'une voiture a déjà 10 ans, calculer la probabilité que sa durée de vie dépasse 12 ans.
3. Comparer le résultat précédent avec la probabilité que la durée de vie de la voiture dépasse 2 ans.

Exercice 6. Un industriel indique que la durée limite de conservation d'un certain produit agro-alimentaire est, en moyenne, de 10 jours après fabrication. On suppose que la durée limite de conservation de ce produit peut être modélisée par une *var* X suivant une loi exponentielle, l'unité étant le jour.

1. Déterminer l'unique réel λ_0 tel que la densité de X s'écrive sous la forme

$$f(x) = \begin{cases} \lambda_0 e^{-\lambda_0 x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Un consommateur déguste le produit 10 jours après qu'il ait été fabriqué. Quelle est la probabilité qu'il consomme un produit dégradé ?
3. On suppose que le consommateur achète le produit dès sa fabrication. Au bout de combien de temps maximum doit-il consommer le produit pour avoir seulement 5 chances sur 100 qu'il soit dégradé ?

Exercice 7. Soient $\lambda > 0$ et X une *var* suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, *i.e.* de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On sait que λ vérifie $\mathbb{P}(X \leq 70) = 0,05$. Montrer que

$$\mathbb{P}(X \geq 30) = (0,95)^{\frac{3}{7}}.$$