TD n^{o} 2 : Probabilités I

Exercice 1. Déterminer un univers adapté à chacune des expériences aléatoires suivantes :

1. On lance un dé cubique honnête. On s'intéresse au numéro affiché.
2. Un sac contient cinq jetons numérotés de 1 à 5 et deux jetons portant le numéro 6. On extrait au hasard un jeton de l'urne. On s'intéresse au numéro obtenu.
3. Une urne contient 19 boules dont 5 bleues, 3 rouges et 11 vertes. On tire au hasard une poignée de 4 boules de l'urne.

Exercice 2. On lance deux dés cubiques honnêtes. On s'intéresse aux numéros affichés.

1. Déterminer un univers adapté à cette expérience aléatoire.
2. On considère les événements $A =$ "la somme des deux numéros est 3" et $B =$ "le produit des deux numéros est 2". Comparer ces deux événements.

Exercice 3. On tire au hasard 2 cartes dans un jeu standard de 32 cartes. On considère les événements suivants :

- $A =$ "les deux cartes tirées sont rouges",
- $B =$ "les 2 cartes tirées sont un valet et un dix",
- $C =$ "les 2 cartes tirées sont des personnages".

Décrire par des phrases les événements suivants :

$$\overline{A}, \qquad A \cap B \cap \overline{C}, \qquad (A \cap \overline{C}) \cap (B \cap \overline{C}), \qquad A \cap B \cap C.$$

Exercice 4. Une entreprise fabrique des appareils électroniques. La probabilité qu'un appareil fonctionne est $0,9$. Calculer la probabilité qu'un appareil prélevé au hasard dans le stock de l'entreprise ne fonctionne pas.

Exercice 5. Soient A et B deux événements tels que

$$\mathbb{P}(A) = 0,6, \qquad \mathbb{P}(B) = 0,3, \qquad \mathbb{P}(A \cap B) = 0,1.$$

1. Quelle est la probabilité que A et B se réalisent simultanément ?
2. Calculer la probabilité que A ou B se réalise.
3. Calculer la probabilité que ni A, ni B se réalisent.

Exercice 6. Soient A et B deux événements tels que

$$\mathbb{P}(A) = 0,7, \qquad \mathbb{P}(B) = 0,4.$$

Est-ce que A et B sont incompatibles ?

Exercice 7. Soient A et B deux événements tels que

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 1.$$

Calculer $\mathbb{P}(A \cap B)$.

Exercice 8. Soient A, B et C trois événements tels que

$$\mathbb{P}(A) = 0,6, \qquad \mathbb{P}(A \cap B) = 0,2, \qquad \mathbb{P}(B \cap C) = 0,1,$$

$$\mathbb{P}(A \cap C) = 0,1, \qquad \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0,05.$$

1. Calculer $\mathbb{P}(A \cup (B \cap C))$ et $\mathbb{P}(A \cap (B \cup C))$.
2. On suppose que $\mathbb{P}(B) = 0,4$. Calculer $\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B})$.

Exercice 9. Une entreprise fabrique des rames de métro. Une étude a montré qu'elle vend 0, 1, 2, 3 ou 4 rames par mois. Pour tout $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, on considère l'événement A_k = "l'entreprise vend k rames en un mois". On a

$$\mathbb{P}(A_0) = 0,10, \qquad \mathbb{P}(A_1) = 0,25, \qquad \mathbb{P}(A_2) = 0,35, \qquad \mathbb{P}(A_3) = 0,25.$$

1. Calculer $\mathbb{P}(A_4)$.
2. Calculer la probabilité que l'entreprise vende au moins une rame en un mois.

Exercice 10. Soient A, B et C trois événements tels que la réalisation de A et B implique celle de C. Montrer que

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \leq 1 + \mathbb{P}(C).$$

Exercice 11. On considère un jeu de fléchettes dont la cible comporte 3 zones : zone 1, zone 2 et zone 3. On lance une fléchette sur la cible. Un univers associé à cette expérience aléatoire est $\Omega = \{\text{zone 1, zone 2, zone 3}\}$. Pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, on considère l'événement A_k = "la fléchette atteint la zone k" = $\{\text{zone } k\}$. Soit $\mathbb{P}$ une probabilité définie sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle qu'il existe un réel c vérifiant

$$\mathbb{P}(A_1) = c, \qquad \mathbb{P}(A_2) = 2c, \qquad \mathbb{P}(A_3) = 3c.$$

1. Montrer que la famille (A_1, A_2, A_3) forme un système complet d'événements.
2. Déterminer l'unique valeur possible pour c.