

TD n° 5 : Probabilités conditionnelles II

Exercice 1. On souhaite tester l'efficacité d'un vaccin. On appelle indicateur d'efficacité le réel λ défini par le rapport de deux probabilités : la probabilité qu'un individu non vacciné soit malade, divisée par la probabilité qu'un individu vacciné soit malade. Plus l'indicateur est grand, plus le vaccin est efficace. On choisit au hasard un individu dans la population. On considère les événements $M =$ "l'individu est malade" et $V =$ "l'individu est vacciné".

1. Montrer que

$$\lambda = \frac{(1 - \mathbb{P}_M(V))\mathbb{P}(V)}{\mathbb{P}_M(V)(1 - \mathbb{P}(V))}.$$

2. Deux laboratoires pharmaceutiques proposent chacun leur vaccin contre une maladie. On dispose des informations suivantes : un quart de la population a utilisé le vaccin A et un cinquième a utilisé le vaccin B . De plus, lors d'une épidémie, on constate que, sur 1000 malades, 16 ont utilisé le vaccin A et 8 le vaccin B . Calculer l'indicateur d'efficacité pour le vaccin A et l'indicateur d'efficacité pour le vaccin B . Quel vaccin est le plus efficace ?

Exercice 2. On considère un lot de 16 composants électroniques dont 4 sont défectueux. On prélève, au hasard, successivement et sans remise (avec ordre), 3 composants du lot. Quelle est la probabilité qu'ils soient tous défectueux ? (*On utilisera la formule des probabilités composées (à l'ordre 3) pour répondre à cette question*).

Exercice 3. On considère trois boîtes numérotées de 1 à 3 telles que :

- la boîte 1 contient 15 ampoules dont 6 défectueuses,
- la boîte 2 contient 8 ampoules dont 3 défectueuses,
- la boîte 3 contient 9 ampoules dont 2 défectueuses.

On suppose que l'on a 2 fois plus de chances de tirer la boîte 2 que les deux autres. On choisit au hasard une boîte, et on y extrait au hasard une ampoule. Calculer la probabilité que l'ampoule extraite soit défectueuse.

Exercice 4. À un carrefour, une étude statistique sur un feu tricolore montre que

- si le feu est vert, il y a 99% de chances que l'automobiliste passe,
- si le feu est orange, il y a 30% de chances que l'automobiliste passe,
- si le feu est rouge, il y a 1% de chances que l'automobiliste passe.

Le cycle du feu tricolore dure une minute répartie comme suit : le feu vert dure 25 secondes, l'orange, 5 secondes et le rouge, 30 secondes. Calculer la probabilité qu'un automobiliste passe sans s'arrêter à ce feu tricolore.

Exercice 5. Un appareil est constitué de nombreux composants. Certains sont en bon état et d'autres en mauvais. La proportion de composants en mauvais état dans l'appareil est m . On veut détecter l'état d'un composant au moyen d'un test.

- Sachant que le composant est en mauvais état, la probabilité que le test soit positif est p .
- Sachant que le composant est en bon état, la probabilité que le test soit positif est q .

On s'intéresse à l'état d'un composant choisi au hasard parmi ceux de l'appareil. On considère les événements $B =$ "le composant est en bon état" et $M =$ "le composant est en mauvais état". Lorsqu'on teste un composant, on considère l'événement $T^+ =$ "le test est positif".

1. Calculer $\mathbb{P}(T^+)$.
2. Calculer $\mathbb{P}_{T^+}(M)$ et $\mathbb{P}_{T^+}(B)$.

Exercice 6. Deux usines, notées $U1$ et $U2$, fabriquent des saucissons. On sait que $U1$ fabrique 90% de bons saucissons et 10% de mauvais, et $U2$ fabrique 80% de bons saucissons et 20% de mauvais. Un grand magasin achète trois quarts de ces saucissons à $U1$ et le reste à $U2$. Si on achète un saucisson dans ce magasin, sachant qu'il est mauvais, quelle est la probabilité qu'il provienne de $U1$?

Exercice 7. Dans un élevage de moutons, on décèle 15% d'animaux malades. La probabilité qu'un mouton qui n'est pas malade ait une réaction négative à un test donné est 0,90. Par contre, s'il est malade, la réaction sera positive avec une probabilité 0,80. Quelle est la probabilité qu'un mouton choisi au hasard et ayant une réaction positive au test soit malade ?

Exercice 8. La société ChocoStar produit pour Pâques des oeufs en chocolat garnis d'un assortiment de bonbons. Avant d'être garnis et emballés, les oeufs sont soumis à un contrôle visuel. On suppose que 5% des oeufs présentent des défauts qui les rendent impropres à la commercialisation et il y a 96% de chances que ceux-ci soient rejetés au contrôle. Il y a aussi 2% de chances que des oeufs sans défaut soient rejetés au contrôle.

1. Quelle est la probabilité qu'un oeuf soit accepté au contrôle ?
2. Sachant qu'un oeuf a été accepté au contrôle, quelle est la probabilité qu'il présente des défauts qui le rendent impropre à la commercialisation ?
3. Quelle est la probabilité que, sur 100 oeufs pris au hasard parmi ceux acceptés au contrôle, au moins un présente des défauts qui le rendent impropre à la commercialisation ?

Exercice 9. Une urne notée U contient 8 boules dont 3 blanches et 5 noires, et une autre urne notée V contient 3 boules dont 2 blanches et 1 noire. On lance alors un dé cubique honnête. Si le numéro obtenu est 6, on tire au hasard une boule de U , sinon, on tire au hasard une boule de V .

1. Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche?
2. On sait que la boule tirée est blanche. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de V ?

Exercice 10. On dispose de 10 pièces de monnaie numérotées de 1 à 10 telles que, pour tout $k \in \{1, \dots, 10\}$, la k -ème pièce amène Pile avec la probabilité $\frac{k}{10}$. On prend au hasard une pièce, on la lance et on obtient Face. Quelle est la probabilité d'avoir lancé la pièce numéro 5 ?