

TD n° 6 : Indépendance d'événements

Exercice 1. Soient A et B deux événements tels que

$$\mathbb{P}(A) = 0,2, \quad \mathbb{P}(A \cup B) = 0,5.$$

1. Montrer que, si A et B sont incompatibles, alors

$$\mathbb{P}(B) = 0,3.$$

2. Montrer que, si A et B sont indépendants, alors

$$\mathbb{P}(B) = 0,375.$$

Exercice 2. On considère 2 groupes d'étudiants G_1 et G_2 . La probabilité qu'un étudiant choisi au hasard dans G_1 soit une fille est 0,3. La probabilité qu'un étudiant choisi au hasard dans G_2 soit une fille est 0,4. Si l'on choisit au hasard un étudiant dans chacun des deux groupes, quelle est la probabilité de choisir 2 filles ?

Exercice 3. On tire au hasard une carte dans un jeu standard de 52 cartes. On considère les événements $A =$ "la carte est un as" et $B =$ "la carte est rouge".

1. Calculer $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(A \cap B)$.
2. Est-ce que A et B sont indépendants ?

Exercice 4. Une urne contient 13 boules dont 6 noires, 3 blanches et 4 rouges. On tire au hasard et simultanément 4 boules de l'urne. On considère les événements $A =$ "on obtient 2 boules blanches" et $B =$ "on obtient 2 boules rouges".

1. Calculer $\mathbb{P}(A)$.
2. Calculer $\mathbb{P}_B(A)$.
3. Est-ce que A et B sont indépendants ?

Exercice 5. Un appareil est composé de 3 dispositifs. On suppose que chaque dispositif fonctionne indépendamment des autres et que

- la probabilité que le premier fonctionne est 0,2,
- la probabilité que le deuxième fonctionne est 0,1,
- la probabilité que le troisième fonctionne est 0,7.

Quelle est la probabilité qu'exactement 2 dispositifs fonctionnent ?

Exercice 6. Soient A et B deux événements indépendants et incompatibles. Calculer $\min(\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B))$.

Exercice 7. Soient A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) \in]0, 1[$ et

$$\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}_{\bar{A}}(B).$$

Montrer que A et B sont indépendants (*on comparera $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}_A(B)$*).

Exercice 8. Soient A et B deux événements indépendants tels que

$$\mathbb{P}_{A \cup B}(B) = \frac{2}{3}, \quad \mathbb{P}_B(A) = \frac{1}{2}.$$

Calculer $\mathbb{P}(B)$.

Exercice 9. Au cours d'une conversation, on apprend qu'un individu a deux enfants dont au moins une fille. Quelle est la probabilité pour qu'il ait deux filles ? (*On admet qu'une femme enceinte a une chance sur deux d'avoir une fille*).

Exercice 10. On lance 15 fois de suite un dé cubique honnête. À chaque fois, on s'intéresse au numéro affiché. Pour tout $k \in \{1, \dots, 6\}$, on considère l'événement $A_k =$ "le dé n'affiche jamais le numéro k ". Pour tout $n \in \{1, \dots, 6\}$, calculer $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right)$. Comment interpréter cette probabilité ?

Exercice 11. L'étoile Sirius est la plus brillante du ciel de l'hémisphère Nord. La probabilité annuelle d'apparition d'au moins une comète plus brillante que Sirius est $\frac{1}{43} (\simeq 0,0232)$. Calculer la probabilité qu'il apparaisse au moins une comète plus brillante que Sirius pendant un siècle d'observation.

Exercice 12. En lisière d'une forêt picarde, n chasseurs aperçoivent un faisan et tirent simultanément dans sa direction. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la probabilité que le tir du i -ème chasseur atteigne le faisan est $\frac{1}{i+1}$. Calculer la probabilité que le faisan soit au moins blessé par un tir de cette attaque.

Exercice 13. On lance 2 dés cubiques honnêtes. On s'intéresse aux numéros affichés. On considère les événements $A =$ "le numéro du premier dé est impair", $B =$ "le numéro du deuxième dé est impair" et $C =$ "la somme des 2 numéros est impaire".

1. Est-ce que A , B et C sont indépendants deux à deux ?
2. Est-ce que A , B et C sont indépendants ?