Université de Caen Basse-Normandie

Année 2008-2009
Mercredi 27-01-2009

Christophe Chesneau

Examen final
Probabilités et Statistique
Durée : 2h00 (de 09h00 à 11h00)

Seuls les stylos sont autorisés

Chaque candidat doit porter son nom dans le coin de la copie qu'il cachera par collage après la signature de la feuille d'émargement. Il devra porter son numéro de place sur chacune de ses copies ou intercalaires.

Exercice 1. (2 pts). Soient $\theta \in]0,1[$ et X une *var* dont la loi est donnée par

$$\mathbb{P}(X = k) = -\frac{\theta^k}{k\ln(1-\theta)}, \qquad k \in \mathbb{N}^*.$$

1- Déterminer la fonction génératrice de X.

2- En déduire la valeur de $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 2. (4 pts). Soient X et Y deux *var iid* suivant chacune la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$, *i.e.* de densité

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose $U = \dfrac{X}{Y}$ et $V = X + Y$.

1- Déterminer $(U, V)(\Omega)$.

2- Pour tout $x > 0$ et tout $y > 0$, on pose $u = \dfrac{x}{y}$ et $v = x + y$.

a) Montrer que $(x, y) = \left(\dfrac{uv}{1+u}, \dfrac{v}{1+u}\right)$.

b) Montrer que le jacobien associé au changement de variables de la question 2-*a*) est

$$J(u,v) = \frac{v}{(1+u)^2}.$$

3- Déterminer une densité de (U, V).

4- Montrer que U et V sont *iid*. Déterminer une densité pour U.

Exercice 3. (4 pts). Soient $\rho \in]-1,1[$ et (X,Y) un vecteur gaussien centré de matrice de covariance

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}.$$

On pose $A = X - 2Y$ et $B = X + Y$.

1- Montrer que (A,B) est un vecteur gaussien.

2- Calculer la matrice de covariance de (A,B). Est-ce que A et B sont indépendantes ?

3- Déterminer la loi de A, et la loi de B.

Exercice 4. (3 pts). Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* de densité commune :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad W_n = 3\sqrt{2n}\left(\overline{X}_n - \frac{2}{3}\right).$$

1- Étudier la convergence en loi de $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2- Montrer que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\overline{X}_n \leq \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

Exercice 5. (3 pts). La hauteur maximale en mètres de la crue annuelle d'un fleuve est une *var* X de densité

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{a}e^{-\frac{x^2}{2a}} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(X_1,\dots,X_n)$ un n-échantillon de X. Ici, $a > 0$ est un réel inconnu que l'on souhaite estimer à l'aide de $(X_1,\dots,X_n)$.

1- Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{a}_n$ de a.

2- *Application.* Une crue supérieure à 6 mètres serait catastrophique. Pendant 8 ans, on a observé les hauteurs de crue du fleuve en mètres. Les résultats sont : $2,5$; $2,9$; $1,8$; $0,9$; $1,7$; $2,1$; $2,2$; $2,8$. À partir de ces mesures, donner une estimation ponctuelle de a et une estimation de la probabilité d'avoir une catastrophe une année donnée.