Université de Caen Basse-Normandie

Année 2009-2010
Mardi 05-01-2010
Christophe Chesneau

Examen final
Probabilités et Statistique
Durée : 3h00 (de 09h00 à 12h00)

Seuls les stylos sont autorisés

Chaque candidat doit porter son nom dans le coin de la copie qu'il cachera par collage après la signature de la feuille d'émargement. Il devra porter son numéro de place sur chacune de ses copies ou intercalaires.

Exercice 1. (2 pts). Une urne contient des boules numérotées de 1 à n : une boule est numérotée 1, 2 sont boules numérotées 2, ..., et n boules sont numérotées n. On tire au hasard une boule de l'urne. Soit X la *var* égale au numéro de la boule tirée. Déterminer la loi de X.

Exercice 2. (2 pts). On lance n fois une pièce de monnaie truquée. Celle-ci donne Pile avec la probabilité p. On appelle k-chaîne une suite de k lancers consécutifs ayant tous donné Pile, cette suite devant être suivie d'un Face ou être la dernière suite du tirage. Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, soit X_k la *var* égale au nombre total de k-chaînes de Piles obtenues au cours des n lancers.

1- Déterminer la loi de X_n.

2- Déterminer la loi de X_{n-1}.

Exercice 3. (4 pts). Soient $p \in]0,1[$, et X et Y deux *var iid* suivant chacune la loi géométrique modifiée en 0 $\mathcal{G}_0(p)$:

$$\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^k, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

On pose $Z = X - Y$. Montrer que

$$\mathbb{P}(Z = k) = \frac{p}{2-p}(1-p)^{|k|}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 4. (3 pts). Soit X une *var* de densité

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in [1, e], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1- Calculer la fonction de répartition de X.

2- Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

3- Calculer $\mathbb{P}(X^2 - 3X + 2 \leq 0)$.

4- On pose $Y = \ln X$. Calculer la fonction de répartition de Y en fonction de celle de X. En déduire une densité de Y. Reconnaître une loi usuelle.

Exercice 5. (3 pts). Soient $p \in]0,1[$ et X une *var* de densité

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{p}{(1-(1-p)x)^2} & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose $Y = 1 - (1-p)X$.

1- Calculer $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{E}(Y^2)$ et $\mathbb{V}(Y)$.

2- Utiliser le résultat de la question 1 pour calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Exercice 6. (3 pts). Soient $p \in]0,1[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \ldots, X_n$, n *var iid* suivant chacune la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$:

$$\mathbb{P}(X_1 = 0) = 1-p, \qquad \mathbb{P}(X_1 = 1) = p.$$

On pose, pour tout $u \in \{1, \ldots, n\}$, $S_u = \sum_{i=1}^{u} X_i$, et, pour tout $j \in \{1, \ldots, n-1\}$,

$$T_j = S_j - \frac{j}{n} S_n.$$

1- Déterminer, pour tout $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, la loi de S_j et la loi de $S_n - S_j$.

2- Montrer que, pour tout $j \in \{1, \ldots, n-1\}$,

$$\{S_j = 0\} \cap \{S_n - S_j = 1\} \subseteq \left\{T_j = -\frac{j}{n}\right\}.$$

En déduire une minoration de $\mathbb{P}\left(T_j = -\frac{j}{n}\right)$. Est-ce que $\mathbb{P}(T_j = 0) = 1$?

3- Montrer que, pour tout $j \in \{1, \ldots, n-1\}$,

$$\{S_n = n\} \subseteq \{T_j = 0\}.$$

Est-ce que T_j et S_n sont indépendantes ?

4- Calculer, pour tout $j \in \{1, \ldots, n-1\}$,

$$\mathbb{C}(T_j, S_n).$$

Est-ce que cela contredit le résultat de la question 3 ?

Exercice 7. (3pts). Soient $\rho \in]-1,1[$ et (X,Y) un vecteur gaussien centré de matrice de covariance

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que la *var*

$$K = \frac{(X-Y)^2}{2-2\rho} + \frac{(X+Y)^2}{2+2\rho}$$

suit la loi du Chi-deux à 2 degrés de liberté.