Université de Caen Basse-Normandie

Année 2010-2011
Mercredi 05-01-2011
Christophe Chesneau

Examen final
Probabilités et Statistique
Durée : 3h00 (de 09h00 à 12h00)

Seuls les stylos sont autorisés

Chaque candidat doit porter son nom dans le coin de la copie qu'il cachera par collage après la signature de la feuille d'émargement. Il devra porter son numéro de place sur chacune de ses copies ou intercalaires.

Exercice 1. Soient $p \in]0,1[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \ldots, X_n$ n *var iid* suivant chacune la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$:

$$\mathbb{P}(X_1 = 0) = 1 - p, \qquad \mathbb{P}(X_1 = 1) = p.$$

On pose

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

1- Donner, sans démonstration, la loi de S_n.

2- Calculer $\mathbb{P}(S_n > 0)$.

3- Calculer $\mathbb{P}(\{S_n = 1\}/\{S_n > 0\})$.

Exercice 2. Soient $\theta > 0$ et X une *var* de densité

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\theta}\left(1 - \dfrac{x}{\theta}\right) & \text{si } x \in [0, \theta], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1- Déterminer la fonction de répartition F_X de X.

2- Calculer l'unique réel α tel que $F_X(\alpha) = \frac{1}{2}$.

3- Calculer $\mathbb{E}(X)$.

4- Calculer $\mathbb{V}(X)$.

Exercice 3. On choisit au hasard un nombre dans l'intervalle $[1, 2]$. Ce nombre peut être modélisé par une *var* X suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([0, 1])$, *i.e.* de densité

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose $Y = e^{X^2 - 1}$.

1- Déterminer la densité de Y.

2- Calculer $\mathbb{E}(XY)$.

Exercice 4. Dans un repère orthonormé (O,I,J), on choisit au hasard un point sur le cercle centré en 0 et de rayon 1. Or choisir un tel point revient à choisir un angle au hasard dans l'intervalle $[0, 2\pi[$. Cet angle peut être modélisé par une *var* Θ suivant la loi $\mathcal{U}([0, 2\pi[)$, *i.e.* de densité

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} & \text{si } x \in [0, 2\pi[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les coordonnées de M sont données par (X, Y) avec

$$X = \cos\Theta, \qquad Y = \sin\Theta.$$

1- Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(XY)$. En déduire $\mathbb{C}(X, Y)$.

2- Que vaut $X^2 + Y^2$? En déduire que

$$\mathbb{V}(X^2) = \mathbb{V}(Y^2), \qquad \mathbb{C}(X^2, Y^2) = -\mathbb{V}(X^2).$$

Est-ce que X et Y sont indépendantes ?

Exercice 5. Soient $\rho \in]-1, 1[$ et (X, Y) un vecteur gaussien centré de matrice de covariance

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que la *var*

$$K = \frac{(X - Y)^2}{2 - 2\rho} + \frac{(X + Y)^2}{2 + 2\rho}$$

suit la loi du Chi-deux à 2 degrés de liberté.

Exercice 6. Soient $\theta > 1$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* de densité commune

$$f(x) = \sqrt{\frac{\ln(\theta)}{2\pi}}\theta^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

1- Reconnaître la loi de X_1. En déduire (simplement) $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{V}(X_1)$.

2- Calculer

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq \sqrt{\frac{n}{\ln(\theta)}}\right).$$

On donne $\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0,84134$.