Université de Caen Basse-Normandie

Année 2011-2012
Mardi 04-01-2012
Christophe Chesneau

Examen final
Probabilités et Statistique
Durée : 3h00 (de 09h00 à 12h00)

Seuls les stylos sont autorisés

Chaque candidat doit porter son nom dans le coin de la copie qu'il cachera par collage après la signature de la feuille d'émargement. Il devra porter son numéro de place sur chacune de ses copies ou intercalaires.

Exercice 1. (2 pts). Soit X une *var* discrète admettant une espérance et A un événement tel que $\mathbb{P}(A) \in]0,1[$. On appelle espérance de X conditionnellement à A le réel :

$$\mathbb{E}_A(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \mathbb{P}_A(\{X = k\}).$$

Exprimer $\mathbb{E}(X)$ en fonction de $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{E}_A(X)$ et $\mathbb{E}_{\overline{A}}(X)$.

Exercice 2. (3 pts). Soient $p \in]0,1[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \ldots, X_n$ n *var iid* suivant chacune la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$:

$$\mathbb{P}(X_1 = k) = p(1-p)^{k-1}, \qquad k \in \mathbb{N}^*.$$

Calculer $\mathbb{P}(X_1 = X_2 = \ldots = X_n)$.

Exercice 3. (3 pts). Soit X une *var* de fonction de répartition

$$F(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

1- Calculer $\mathbb{P}(X < 0)$ et $\mathbb{P}(0 \leq X \leq \ln 2)$.

2- On pose $Y = e^X$. Déterminer une densité de Y.

3- Calculer $\mathbb{E}(\sqrt{Y+1})$.

Exercice 4. (3 pts). Soient $\theta > 1$ et X une *var* de densité

$$f(x) = \begin{cases} \theta(1-x)^{\theta-1} & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1- Vérifier que f est bien une densité.

2- Calculer $\mathbb{E}(1-X)$ et $\mathbb{E}((1-X)^2)$.

3- En déduire les valeurs de $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Exercice 5. (3 pts). Soit (X, Y) un couple de *var* de densité

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } 0 \leq y \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1- Déterminer une densité de X, puis une densité de Y.

2- Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(XY)$. En déduire $\mathbb{C}(X, Y)$

Exercice 6. (3 pts). Soit (X, Y) un couple gaussien de moyenne $(1, 1)$ et de matrice de covariance

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

1- Est-ce que (X^2, Y) est un couple gaussien ?

2- Calculer $\mathbb{E}(X^2)$, $\mathbb{E}(Y^2)$ et $\mathbb{E}(XY)$.

3- Déterminer une densité de $X - Y$ et calculer $\mathbb{E}(|X - Y|)$.

Exercice 7. (3 pts). Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* telles que $\mathbb{E}(X_1) = 0$ et $\mathbb{E}(X_1^2) = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

1- Déterminer

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n \geq 0).$$

2- a) Exprimer $\mathbb{E}\left(S_n^2\right)$ en fonction de n.

b) En déduire que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|S_n| \geq n^{\frac{3}{4}}\right) = 0.$$