Université de Caen Basse-Normandie

Année 2012-2013
Jeudi 12-01-2013
Christophe Chesneau

Examen final
Probabilités et Statistique
Durée : 3h00 (de 09h00 à 12h00)

Seuls les stylos sont autorisés

Chaque candidat doit porter son nom dans le coin de la copie qu'il cachera par collage après la signature de la feuille d'émargement. Il devra porter son numéro de place sur chacune de ses copies ou intercalaires.

Exercice 1. (2 pts). Soient $p \in]0,1[$ et X une *var* suivant la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1-p)$:

$$\mathbb{P}(X = 0) = p, \qquad \mathbb{P}(X = 1) = 1 - p.$$

On pose $Y = \min(X^2, 2X)$. Déterminer la loi de Y.

Exercice 2. (3 pts). Soient $p \in]0,1[$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* suivant chacune la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$:

$$\mathbb{P}(X_1 = 0) = 1 - p, \qquad \mathbb{P}(X_1 = 1) = p.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

1- Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $m \in \{1, \ldots, n\}$, la loi de S_m et la loi de $S_n - S_m$. Est-ce que S_m et $S_n - S_m$ sont indépendantes ?

2- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout $m \in \{1, \ldots, n\}$, tout $k \in \{0, \ldots, n\}$ et tout $l \in \{k, \ldots, n\}$,

$$\mathbb{P}\left(\{S_m = k\}/\{S_n = l\}\right) = \frac{\binom{m}{k}\binom{n-m}{l-k}}{\binom{n}{l}}.$$

Exercice 3. (5 pts). *On admet, et on utilisera si besoin est, la formule suivante : pour tout $b > a > 0$, on a*

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln(x)} dx = \ln\left(\frac{b+1}{a+1}\right).$$

Soient $a > 0$, $b = e(a+1) - 1$ et X une *var* de densité

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^b - x^a}{\ln(x)} & \text{si } x \in]0,1[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1- Vérifier que f est bien une densité.

2- Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

3- On pose $Y = -\ln(X)$.

   a) Déterminer une densité de Y.
   b) Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$.

Exercice 4. (2 pts). Déterminer l'unique réel positif b tel que la fonction g définie ci-dessous soit une densité :

$$g(x, y) = \begin{cases} be^{-(x-1)^2} & \text{si } 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 5. (3 pts). Soient $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ et X et Y deux *var* indépendantes telles que

- X suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda_1)$, *i.e.* de densité

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Y suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda_2)$, *i.e.* de densité

$$f_Y(x) = \begin{cases} \lambda_2 e^{-\lambda_2 x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminer une densité de $X + Y$ en distinguant le cas $\lambda_1 \neq \lambda_2$ et le cas $\lambda_1 = \lambda_2$.

Exercice 6. (5 pts). Soient $\rho \in]-1, 1[$ et (X, Y) un couple gaussien centré de matrice de covariance

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}.$$

On pose

$$Z = \frac{X - \rho Y}{\sqrt{1 - \rho^2}}.$$

1- Montrer que (Y, Z) est un couple gaussien. Déterminer la loi de Y puis celle de Z.

2- Est-ce que Y et Z sont indépendantes ?

3- Calculer $\mathbb{P}(\min(Y, Z) > 0)$.

4- On admet que, pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^{\infty} \left(\int_{-ay}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right) e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \arctan(a) + \frac{\pi}{2}.$$

Calculer $\mathbb{P}(\min(X, Y) > 0)$.