Université de Caen Basse-Normandie

Année 2013-2014
Mercredi 08-01-2014
Christophe Chesneau

Examen final
Probabilités et Statistique
Durée : 3h00 (de 09h00 à 12h00)

Seuls les stylos sont autorisés

Chaque candidat doit porter son nom dans le coin de la copie qu'il cachera par collage après la signature de la feuille d'émargement. Il devra porter son numéro de place sur chacune de ses copies ou intercalaires.

Exercice 1. (3 pts). Soient $p \in]0,1[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \ldots, X_n$ n *var iid* suivant chacune la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$:

$$\mathbb{P}(X_1 = 0) = 1 - p, \qquad \mathbb{P}(X_1 = 1) = p.$$

On pose

$$Y_n = \prod_{i=1}^{n} X_i.$$

1- Déterminer la loi de Y_n.

2- Calculer $\mathbb{V}(Y_n)$.

Exercice 2. (3 pts). On s'interesse à la durée de vie d'un certain type de voiture. Soit X la *var* égale à la durée de vie en années d'une de ces voitures. On suppose que X suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\frac{1}{10})$ *i.e.*, de densité

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1- Calculer la probabilité qu'une voiture dépasse 10 ans de durée de vie.

2- Sachant qu'une voiture a déjà 10 ans, calculer la probabilité qu'elle dépasse 12 ans de durée de vie.

3- Comparer le résultat précédent avec la probabilité que la durée de vie de la voiture dépasse 2 ans.

Exercice 3. (3 pts). Soit X une *var* de densité

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose $Y = \ln(1 + X^2)$.

1- Calculer, pour tout $x \geq 0$,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)'.$$

2- Déterminer la fonction de répartition de Y, puis une densité de Y. Reconnaître une loi usuelle.

Exercice 4. (4 pts). Soit (X, Y) un couple de *var* de densité

$$f(x,y) = \begin{cases} 2\dfrac{y}{x^2} & \text{si } 0 \leq y \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1- Déterminer une densité de X, puis une densité de Y.

2- Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(XY)$. En déduire $\mathbb{C}(X, Y)$

Exercice 5. (4 pts). Soient X et Y deux *var iid* suivant la loi Gumbel$(0, 1)$, *i.e.* de densité commune

$$f(x) = e^{-x} \exp(-e^{-x}), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

1- Déterminer une densité de $-Y$.

2- On pose $W = X - Y$. Montrer que W suit la loi Logistique$(0, 1)$, *i.e.* de densité

$$g(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 6. (3 pts). Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* suivant chacune la loi uniforme $\mathcal{U}([0, 1])$, *i.e.* de densité

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad W_n = 2\sqrt{3n}\left(\overline{X}_n - \frac{1}{2}\right).$$

1- Étudier la convergence en loi de $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2- Montrer que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(2\sum_{i=1}^{n} X_i \geq n\right) = \dfrac{1}{2}$.