Université de Caen Basse-Normandie

Année 2014-2015
Lundi 05-01-2015
Christophe Chesneau

Examen final
Probabilités et Statistique
Durée : 3h00 (de 09h00 à 12h00)

Seuls les stylos sont autorisés

Chaque candidat doit porter son nom dans le coin de la copie qu'il cachera par collage après la signature de la feuille d'émargement. Il devra porter son numéro de place sur chacune de ses copies ou intercalaires.

Exercice 1. (2 pts). Soient $\theta > 0$ et X une *var* de densité

$$f(x) = \begin{cases} (\theta+1)(\theta+2)(1-x)x^{\theta} & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1- Vérifier que f est bien une densité.

2- Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 2. (3 pts). Peut-on trouver 2 réels a et b tels qu'une *var* X de densité f vérifie les deux conditions suivantes ?

Condition 1 :

$$f(x) = \begin{cases} a + bx^2 & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Condition 2 : $\mathbb{E}(X) = 1$.

Exercice 3. (3 pts). Soit X une *var* suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, *i.e.* de densité

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

On pose $Y = |X| + 8$.

1- Déterminer la fonction de répartition de Y en fonction de celle de X, puis une densité de Y.

2- Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$.

Exercice 4. (3 pts). Soit X une *var* de densité

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi(2x^2 - 2x + 1)} & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1- Calculer $\mathbb{E}(4X-2)$ et $\mathbb{E}(2X^2-2X+1)$.

2- En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Exercice 5. (3 pts). Soient $\lambda > 0$ et X, Y et Z trois *var iid* suivant chacune la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, *i.e.* de densité

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose $V = X + Y$.

1- Déterminer la densité de V.

2- Calculer $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X+Y}\right)$.

Exercice 6. (3 pts). Soit (X,Y) un vecteur gaussien centré tel que

- $\mathbb{E}\left(X^2\right) = 2$ et $\mathbb{E}\left(Y^2\right) = 1$,
- les *var* $X+2Y$ et $X-3Y$ sont indépendantes.

1- Déterminer la matrice de covariance de (X,Y).

2- Montrer que $(X+Y, 2X-Y)$ est un vecteur gaussien et déterminer sa matrice de covariance.

Exercice 7. (3 pts). Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* suivant chacune la loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$, *i.e.* de densité :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad W_n = 2\sqrt{3n}\left(\overline{X}_n - \frac{1}{2}\right).$$

1- Étudier la convergence en loi de $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2- Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(2\sum_{i=1}^{n} X_i \geq n\right) = \frac{1}{2}.$$