Université de Caen Basse-Normandie

Année 2017-2018
Mercredi 17-05-2017
Christophe Chesneau

L3 MATHS
Examen final
ULM6GT Probabilités et Statistique
Durée : 3h00 (de 14h00 à 17h00)

Seuls les stylos sont autorisés

Chaque candidat doit porter son nom dans le coin de la copie qu'il cachera par collage après la signature de la feuille d'émargement. Il devra porter son numéro de place sur chacune de ses copies ou intercalaires.

Exercice 1. (4 pts). Soient $p \in]0,1[$, $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ et $X_1, \ldots, X_{n+1}$ $n+1$ *var iid* suivant chacune la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$:

$$\mathbb{P}(X_1 = 0) = 1 - p, \qquad \mathbb{P}(X_1 = 1) = p.$$

On pose

$$Y_n = \prod_{i=1}^{n} X_i, \qquad Z_n = \prod_{i=2}^{n+1} X_i.$$

1- Calculer $\mathbb{P}(Y_n \neq Z_n)$.

2- Calculer $\mathbb{C}(Y_n, Z_n)$.

Exercice 2. (4 pts). Soient $\lambda > 0$ et X une *var* suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, *i.e.* de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose

$$Y = e^{-X}.$$

1- Déterminer une densité de Y.

2- Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$.

3- Calculer $\mathbb{V}(X + Y)$.

Exercice 3. (4 pts). Soient X et Y 2 *var iid* suivant chacune la loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$, *i.e.* de densité :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose

$$Z = X^2 - Y.$$

1- Déterminer une densité de X^2 et une densité de $-Y$.

2- Déterminer une densité de Z.

3- Calculer $\mathbb{P}(Z > 0)$.

4- Calculer $\mathbb{E}(Z)$ et $\mathbb{V}(Z)$.

Exercice 4. (4 pts). Soient $\theta > 1$, et X et Y 2 *var iid* de densité commune

$$f(x) = \sqrt{\frac{\ln(\theta)}{2\pi}}\theta^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

1- Reconnaître une loi usuelle pour X. Donner, sans calcul, $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

2- Donner, sans calcul, la loi de $X - 2Y + 1$.

3- On pose

$$U = (2X + 3Y, X - 2Y + 1)^t.$$

a) Montrer que U est un vecteur gaussien.

b) Déterminer l'espérance et la matrice de covariance de U.

Exercice 5. (4 pts). Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* suivant chacune la loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$, *i.e.* de densité :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$Y_n = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} \sin\left(\frac{\pi}{2}X_i\right).$$

1- Étudier la convergence en probabilité de $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2- Étudier la convergence en loi de $\left(\dfrac{Y_n - \mathbb{E}(Y_n)}{\sigma(Y_n)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$Z_n = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}X_i\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}(1 - X_i)\right)\right).$$

a) Comparer $\mathbb{E}(Y_n)$ et $\mathbb{E}(Z_n)$.

b) Comparer $\mathbb{V}(Y_n)$ et $\mathbb{V}(Z_n)$.