Exercice 122. Soit X une *var* suivant la loi de Cauchy $\mathcal{C}(0,1)$, *i.e.* de densité :

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Déterminer une densité de $Z = \dfrac{1}{X}$.

Solution 122. Dans un premier temps, déterminons la fonction de répartition de Z. On a $X(\Omega) = \mathbb{R}$, donc $Z(\Omega) = (\frac{1}{X})(\Omega) = \mathbb{R}$. Distinguons le cas $x = 0$, le cas $x < 0$ et le cas $x > 0$. Soit F_X la fonction de répartition de X.

- Comme $f(x)$ est paire, X est symétrique, donc $\mathbb{P}(X < 0) = \mathbb{P}(X > 0) = \frac{1}{2}$. Ainsi, pour $x = 0$, il vient
$$F_Z(x) = \mathbb{P}(Z \le x) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{X} \le 0\right) = \mathbb{P}(X < 0) = \frac{1}{2}.$$
- Pour tout $x < 0$, on a
$$\begin{aligned} F_Z(x) &= \mathbb{P}(Z \le x) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{X} \le x\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left\{\frac{1}{X} \le x\right\} \cap \{X < 0\}\right) + \mathbb{P}\left(\left\{\frac{1}{X} \le x\right\} \cap \{X \ge 0\}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{1}{x} \le X < 0\right) + \mathbb{P}(\varnothing) = \mathbb{P}(X < 0) - \mathbb{P}\left(X < \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2} - F_X\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$
- Pour tout $x > 0$, on a
$$\begin{aligned} F_Z(x) &= \mathbb{P}(Z \le x) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{X} \le x\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left\{\frac{1}{X} \le x\right\} \cap \{X \le 0\}\right) + \mathbb{P}\left(\left\{\frac{1}{X} \le x\right\} \cap \{X > 0\}\right) \\ &= \mathbb{P}(X \le 0) + \mathbb{P}\left(X \ge \frac{1}{x}\right) = \mathbb{P}(X < 0) + \left(1 - \mathbb{P}\left(X < \frac{1}{x}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2} + \left(1 - F_X\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{3}{2} - F_X\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Au final, on a

$$F_Z(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} - F_X\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x < 0, \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0, \\ \dfrac{3}{2} - F_X\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Par dérivation de F_Z, on obtient une densité de Z. Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\left(-F_X\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = -\left(-\frac{1}{x^2}\right) F_X'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} f_X\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} \frac{1}{\pi\left(1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2\right)} = \frac{1}{\pi(1+x^2)},$$

une densité de Z est

$$f_Z(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

On reconnaît une densité associée à la loi de Cauchy $\mathcal{C}(0,1)$: $Z \sim \mathcal{C}(0,1)$. Ainsi, Z et X suivent la même loi.