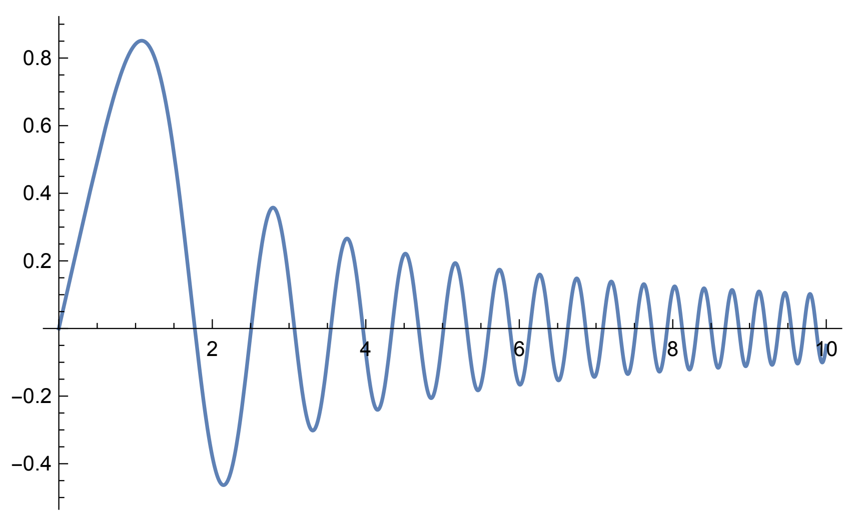
Fiches de Mathématiques : BAC STAV

C. Chesneau



08 Mai 2018

Table des matières

1 QUELQUES RAPPELS

Opération sur les Inégalités ; signe de $ax+b$ et signe de ax^2+bx+c.

A) Opérations sur les Inégalités :

- Pour tout nombre a : $x < y \Rightarrow x + a < y + a$
- Pour tout nombre $k > 0$: $x < y \Rightarrow kx < ky$
- Pour tout nombre $k < 0$: $x < y \Rightarrow kx > ky$ (on change le sens de l'inégalité !)
- Si x et y sont de même signe alors : $x < y \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ (on change le sens de l'inégalité !)
- Si $x > 0$ et $y > 0$: $x < y \Rightarrow x^2 < y^2$
- Si $x > 0$ et $y > 0$: $x < y \Rightarrow \sqrt{x} < \sqrt{y}$
- Si f croissante : $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
- Si f décroissante : $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$

B) Signe de : $ax+b$

On cherche d'abord la valeur de x qui annule $ax+b$: $ax+b=0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$.

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de $ax+b$		Signe de $(-a)$	0	Signe de a	

C) Signe de : ax^2+bx+c $(a \neq 0)$

On calcule le DISCRIMINANT : $\Delta = b^2 - 4 \times a \times c$.

1) Si $\Delta < 0$: pas de solution et le trinôme est toujours du signe de a.

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de ax^2+bx+c		Signe de a	

2) Si $\Delta = 0$, on a une racine double : $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
Signe de $ax+b$		Signe de a	0	Signe de a	

3) Si $\Delta > 0$, on a 2 racines : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $(x_1 < x_2)$.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de ax^2+bx+c		Signe de a	0	Signe de $(-a)$	0	Signe de a	

2 LIMITES

A) Limite d'une SOMME :

Si f a une limite en a	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si g a une limite en a	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $f+g$ a une limite en a	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I

F.I : Forme Indéterminée.

B) Limite d'un PRODUIT :

Si f a une limite en a	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	0
Si g a une limite en a	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $f \times g$ a une limite en a	$\ell \times \ell'$	$+\infty$ si $\ell > 0$ $-\infty$ si $\ell < 0$	$-\infty$ si $\ell > 0$ $+\infty$ si $\ell < 0$	$-\infty$	$+\infty$	F.I

Pour un produit : on applique la règle des signes.

C) Limite d'un QUOTIENT :

Si f a une limite en a	ℓ	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$ ou $-\infty$	∞	0
Si g a une limite en a	$\ell' \neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$ ou $-\infty$	ℓ	∞	0
Alors $\frac{f}{g}$ a une limite en a	$\frac{\ell}{\ell'}$	$+\infty$ si $\ell > 0$ $-\infty$ si $\ell < 0$	$+\infty$ si $\ell < 0$ $-\infty$ si $\ell > 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	F.I	F.I

EXEMPLE : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

D) ASYMPTOTES :

- Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ alors la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à (C).
- Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$ alors la droite d'équation $y = b$ est une asymptote horizontale à (C).

(C) étant la courbe représentative de la fonction f.

REMARQUE : Position relative entre 2 courbes (C_f) et (C_g).

On étudie le SIGNE de : $f(x) - g(x)$.
- Si $f(x) - g(x) \geq 0$ alors (C_f) est située au-dessus de (C_g).
- Si $f(x) - g(x) \leq 0$ alors (C_f) est située en-dessous de (C_g).

3 DÉRIVÉES

Dérivées usuelles et opérations sur les dérivées.

A) Dérivés des fonctions usuelles :

Fonctions	Dérivées
$f(x) = a$ (constante)	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$ $(x \geq 0)$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

B) Opérations sur les dérivées :

Fonctions	Dérivées
$f + g$	$f' + g'$
$k \times f$	$k \times f'$
$f \times g$	$f' \times g + f \times g'$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$
$\frac{1}{f}$	$-\frac{f'}{f^2}$
f^2	$2 \times f \times f'$

C) Tangentes :

- Si f est dérivable en a alors une équation de la tangente à (C_f) en a est :

$$y = f'(a) \times (x - a) + f(a).$$

- $f'(a)$ représente le coefficient directeur de la tangente à (C_f) en a.

Si $f'(a) = 0$ alors la tangente à (C_f) en a est PARALLÈLE à l'axe des abscisses.

EXEMPLE : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ et (C) sa courbe.
Donner l'équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 1.

Ici : $a = 1$ donc $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$.
On cherche la dérivée de f : $f'(x) = 3x^2 - 6x$ donc : $f'(1) = 3 \times 1^2 - 6 \times 1 = 3 - 6 = -3$ et $f(1) = 1^3 - 3.1^2 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$.
Donc l'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est :

$$y = -3(x - 1) + 0 = -3x + 3.$$

4 TABLEAUX DE CONTINGENCE

EXEMPLE : On s'intéresse à la croissance des poules. On a un lot témoin : lot 1, un lot 2 : vaccination par injection et un lot 3 : vaccination par voie orale.
On obtient 3 catégories de poids : Inférieure, Intermédiaire et Supérieure.
On a le tableau de CONTINGENCE ci-dessous représentant les modalités de 2 variables statistiques (catégorie de poids et type de vaccination) observées sur une population de 90 poules.

A) Effectifs MARGINAUX des lignes et des colonnes :

	CATÉGORIES DE POIDS			
LOT	Inférieure	Intermédiaire	Supérieure	TOTAL
1	6	17	7	30
2	5	15	8	28
3	7	10	15	32
TOTAL	18	42	30	90

La colonne TOTAL contient les EFFECTIFS MARGINAUX LIGNES.
La ligne TOTAL contient les EFFECTIFS MARGINAUX COLONNES.

B) Construction du tableau donnant les PROFILS COLONNES et le PROFIL MARGINAL des colonnes :

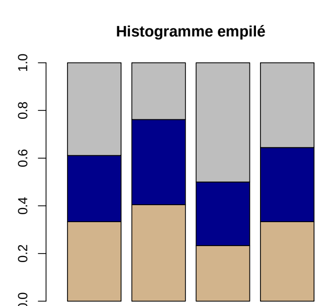
	CATÉGORIES DE POIDS			
LOT	Inférieure	Intermédiaire	Supérieure	TOTAL
1	$\frac{6}{18}$ $0,33$	$\frac{17}{42}$ $0,40$	$\frac{7}{30}$ $0,23$	$\frac{30}{90}$ $0,33$
2	$\frac{5}{18}$ $0,28$	$\frac{15}{42}$ $0,36$	$\frac{8}{30}$ $0,27$	$\frac{28}{90}$ $0,31$
3	$\frac{7}{18}$ $0,36$	$\frac{10}{42}$ $0,24$	$\frac{15}{30}$ $0,50$	$\frac{32}{90}$ $0,36$
TOTAL	1	1	1	1

La colonne TOTAL contient les PROFILS MARGINAUX COLONNES.
Les colonnes Inférieure, Intermédiaire et Supérieure contiennent les PROFILS COLONNES.

C) Représentation graphique :

HISTOGRAMME EMPILÉ : On utilise les profils colonnes et le profil marginal colonnes représentés par des rectangles empilés dont les hauteurs sont les valeurs de la colonne.

EXEMPLE : Avec le tableau de contingence ci-dessus :



5 FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

A) Ensemble de définition : $]0;+\infty[$, $x>0$.

EXEMPLE : la fonction $f : f(x)=\ln(x-1)$ n'existe que si : $x-1>0$ soit $x>1$.

B) Limites :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

C) Dérivées :

- $(\ln x)' = \dfrac{1}{x} \quad (x>0)$
- $(\ln u(x))' = \dfrac{u'(x)}{u(x)} \quad (u(x)>0)$
- $(\ln(ax+b))' = \dfrac{a}{ax+b} \quad (ax+b>0)$

D) Propriétés :

- $\ln 1 = 0$
- $\ln e = 1$
- $a>0$ et $b>0$: $\ln(a\times b) = \ln a + \ln b$
- $\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$
- $\ln(a^n) = n\times \ln a$
- $\ln \dfrac{1}{a} = -\ln a$
- $\ln \sqrt{a} = \dfrac{1}{2}\times \ln a$

E) Équations - Inéquations :

$a>0$ et $b>0$:
- $\ln a = \ln b \quad \Leftrightarrow \quad a=b$
- $\ln a \le \ln b \quad \Leftrightarrow \quad a\le b$
- $\ln a < \ln b \quad \Leftrightarrow \quad a<b$

F) Signe de $\ln x$:

- Si $0<x<1$ alors : $\ln x < 0$
- Si $x>1$ alors : $\ln x > 0$

EXEMPLES :

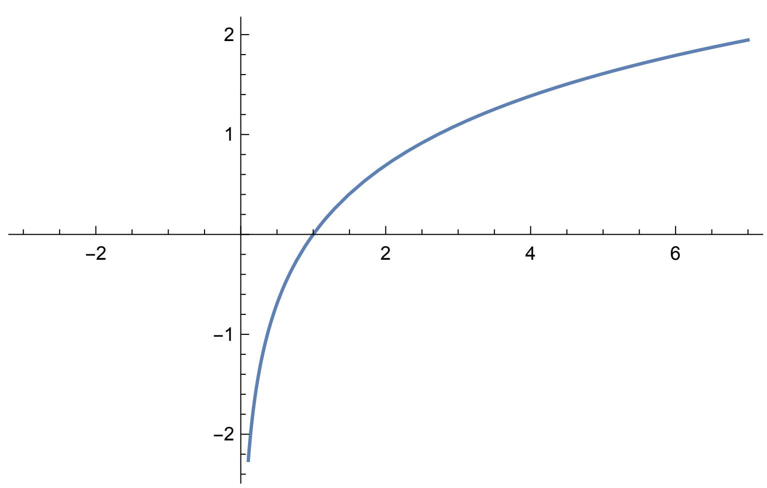
$$\begin{cases} \ln 0,3 \sim -1,2 & (0,3<1), \\ \ln 0,3 < 0 & . \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln 1,2 \sim 0,2 & (1,2>1), \\ \ln 1,2 > 0 & . \end{cases}$$

G) Tableau de variations de $\ln(x)$:

x	0	$+\infty$
Variations de $\ln x$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

H) Courbe représentative de $\ln x$:



6 FONCTION EXPONENTIELLE

A) Ensemble de définition : $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$.

B) Limites :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

C) Dérivées :

- $(e^x)' = e^x$
- $\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x) \times e^{u(x)}$
- $\left(e^{ax+b}\right)' = a \times e^{ax+b}$

D) Propriétés :

- $e^0 = 1$
- $e^1 = e$
- $e \sim 2,718$ à 10^{-3} près
- $e^{a+b} = e^a \times e^b$
- $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$
- $(e^a)^n = e^{a \times n}$
- $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$

E) Équations - Inéquations :

$a > 0$ et $b > 0$:
- $e^a = e^a \quad \Leftrightarrow \quad a = b$
- $e^a \leq e^b \quad \Leftrightarrow \quad a \leq b$
- $e^a < e^b \quad \Leftrightarrow \quad a < b$
- $e^{\ln x} = x \quad (x > 0)$
- $\ln e^x = x \quad (x$ réel$)$

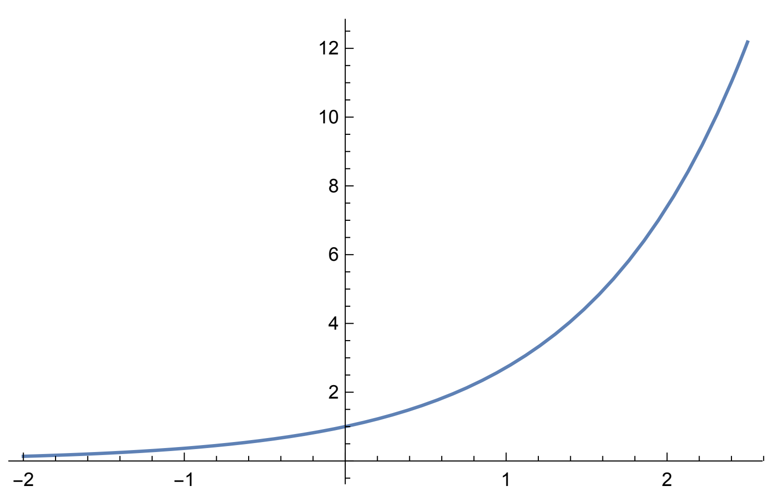
F) Signe de e^x :

- Pour tout réel x : $e^x > 0$
- Si la fonction u est définie : $e^{u(x)} > 0$

G) Tableau de variations de e^x :

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de e^x	0 $\nearrow$	$+\infty$

H) Courbe représentative de e^x :



7 PRIMITIVES ET INTÉGRALES

A) Définition :

- F est une primitive de f sur un intervalle I $\Leftrightarrow$ $F'(x) = f(x)$.
- Si une fonction f admet une primitive, elle en admet une INFINITÉ : $F(x) + k$, k constante.

B) Primitives usuelles et opérations sur les primitives :

1) Primitives des fonctions usuelles

Fonctions	Primitives
$f(x) = 0$	$F(x) = a$ (constante)
$f(x) = 1$	$F(x) = x$
$f(x) = a$	$F(x) = a \times x$
$f(x) = x$	$F(x) = \dfrac{x^2}{2}$
$f(x) = x^2$	$F(x) = \dfrac{x^3}{3}$
$f(x) = x^n$	$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\dfrac{1}{x}$ $(x \neq 0)$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x$ $(x > 0)$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2 \times \sqrt{x}$ $(x \geq 0)$
$f(x) = \frac{a}{ax+b}$	$F(x) = \ln(ax+b)$ $(ax+b > 0)$
$f(x) = e^{ax+b}$	$F(x) = \dfrac{1}{a} \times e^{ax+b}$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$

2) Opérations sur les primitives

Fonctions	Primitives
$f + g$	$F + G$
$k \times f$	$k \times F$
$f' \times f^n$	$\dfrac{f^{n+1}}{n+1}$
$\dfrac{f'}{f}$	$\ln f$ $(f > 0)$

C) CALCUL INTÉGRAL :

1) Si F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[a; b]$ alors :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

2) Propriété de l'intégrale :

- $\displaystyle\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$
- $\displaystyle\int_a^b k \times f(x)dx = k \times \int_a^b f(x)dx.$

3) Valeur moyenne d'une fonction f continue sur un intervalle $[a; b]$:

C'est le nombre m tel que $m = \dfrac{\displaystyle\int_a^b f(x)dx}{b-a}$.

4) L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ représente l'AIRE du domaine délimité par la courbe de la fonction, l'axe des abscisses et les droites (verticales) $x = a$ et $x = b$ en unités d'aire.

D) EXEMPLES : Primitives :

• Chercher les primitives des fonctions : $f(x) = x^2 - 4x + 5$ et $g(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$.

La primitive de : x^2 est : $\dfrac{1}{3} \times x^3$; celle de $-4x$ est $-4 \times \dfrac{x^2}{2} = -2x^2$ et celle de 5 est : $5x$

donc $F(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5x + k$, k : constante.

La primitive de $\dfrac{1}{x}$ est $\ln x$ $(x > 0)$ donc : $G(x) = \dfrac{1}{3} \times x^3 + \ln x + k$, k : constante.

E) EXEMPLES : Intégrales :

• Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{-2}^{1} x dx$.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-2; 1]$, on a $f(x) = x$ et $F(x) = \dfrac{x^2}{2}$.

$$\int_{-2}^{1} f(x)dx = F(1) - F(-2) \qquad F(1) = \frac{1^2}{2} = \frac{1}{2} \qquad F(-2) = \frac{(-2)^2}{2} = \frac{4}{2} = 2 \qquad \Rightarrow$$

$$\int_{-2}^{1} f(x)dx = \frac{1}{2} - (2) = \frac{1}{2} - \frac{2 \times 2}{2} = \frac{1}{2} - \frac{4}{2} = -\frac{3}{2}.$$

• Soit la fonction f, sur $[0; 1]$ telle que $f(x) = x^2$; f est continue et positive sur $[0; 1]$. Calculer l'aire, en u a, délimitée par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ (axe des ordonnées) et $x = 1$.

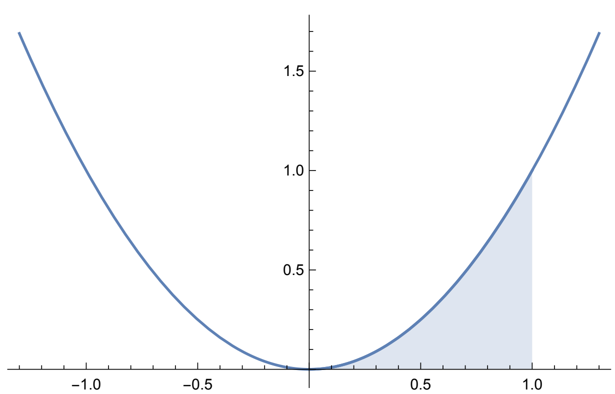
Cette aire est égale à : $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$. Une primitive de f : $f(x) = x^2$ est : $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$.

Donc :

$$\int_0^1 f(x)dx = [F(x)]_0^1 = F(1) - F(0), \qquad F(1) = \frac{1^3}{3} = \frac{1}{3}, \qquad F(0) = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3} \text{ unités d'aire.}$$

On peut visualiser cette aire avec le graphique :



8 PROBABILITÉS CONDITIONNELLES ET INDÉPENDANCE

Soit les événements A et B, et Ω l'univers (ensemble des résultats possibles).

- $P(\varnothing) = 0$
- $P(\Omega) = 1$
- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\overline{A}$: événement contraire de A.

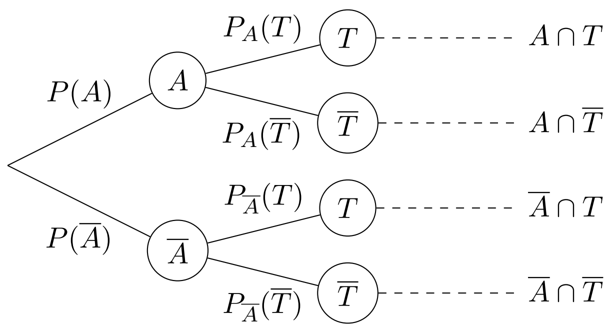
A) Probabilités conditionnelles :

- On appelle probabilité de B SACHANT A, le réel :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

- On a : $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) \quad (= P_B(A) \times P(B))$.

B) Arbre pondéré 1 :



$P(A \cap T) = P(A) \times P_A(T)$

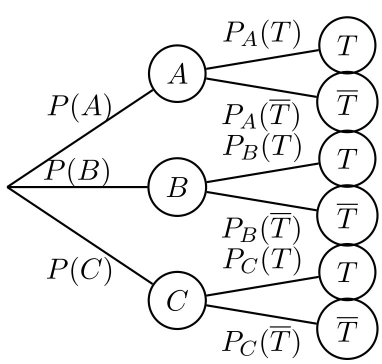
$P(A \cap \overline{T}) = P(A) \times P_A(\overline{T})$

$P(\overline{A} \cap T) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(T)$

$P(\overline{A} \cap \overline{T}) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(\overline{T})$

Calcul de $P(T)$: $P(T) = P(A \cap T) + P(\overline{A} \cap T) \qquad P(T) = P(A) \times P_A(T) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(T)$

C) Arbre pondéré 2 :



Calcul de $P(T)$:

$P(T) = P(A \cap T) + P(B \cap T) + P(C \cap T)$

$P(T) = P(A) \times P_A(T) + P(B) \times P_B(T) + P(C) \times P_C(T)$

D) Événements indépendants :

Les événements A et B sont indépendants si : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ ou $P_A(B) = P(B)$ ou $P_B(A) = P(A)$.

9 LOI BINOMIALE

A) Définitions :

- Épreuve de Bernoulli : toute expérience aléatoire ne présentant que 2 issues possibles (l'une appelée SUCCÈS, l'autre ECHEC).

- Schéma de Bernoulli : toute RÉPÉTITION d'épreuves de Bernoulli IDENTIQUES et INDÉPENDANTES.

B) Propriétés :

Si X est la variable aléatoire égale au nombre de succès en n épreuves, X suit une loi binomiale de paramètres n et p, notée $B(n;p)$.
n : nombre d'épreuves identiques et indépendantes et p : la probabilité de SUCCÈS.
On a :

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\times p^k\times(1-p)^{n-k}$$

$0\leq k\leq n$, k : entier.
L'espérance de la V.A X est :

$$E(X)=n\times p.$$

C) Utilisation de la calculatrice : TI 83 PREMIUM CE :

- $P(X=k)$ $\Rightarrow$ binomFdp$(n;p;k)$
- $P(X\leq k)$ $\Rightarrow$ binomFRép$(n;p;k)$

Remarque : On a

$$P(X\geq k)=1-P(X<k)=1-P(X\leq k-1)$$

$\Rightarrow$ 1− binomFRép$(n;p;k-1)$

EXEMPLE : On lance 7 fois un dé équilibré et on note X le nombre de 6 obtenus.
On a la répétition de 7 épreuves aléatoires identiques et indépendantes dont la probabilité de SUCCÈS est $p=P(S)=\dfrac{1}{6}$. La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres : $n=7$ et $p=\dfrac{1}{6}$.
La probabilité d'obtenir EXACTEMENT 3 fois un 6 est :

$$P(X=3)=\binom{7}{3}\times\left(\frac{1}{6}\right)^3\times\left(1-\frac{1}{6}\right)^{7-3}=\binom{7}{3}\times\left(\frac{1}{6}\right)^3\times\left(\frac{5}{6}\right)^4.$$

À la calculatrice : binomFdp$\left(7;\frac{1}{6};3\right)\sim 0,078$ à 10^{-3} près.

10 LOI NORMALE

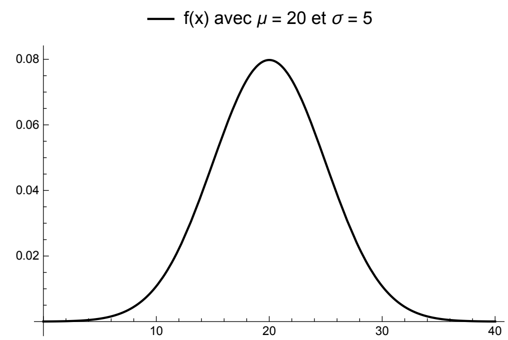
A) Fonction de LAPLACE-GAUSS :

Définition :

Soit μ un nombre réel et σ un réel positif. C'est la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

La représentation graphique de cette fonction est une courbe "en cloche" dite courbe de GAUSS.
EXEMPLE : $\mu = 20$, $\sigma = 5$; le maximum de la fonction est : $\dfrac{1}{5\sqrt{2\pi}} \sim 0,08$.
La droite d'équation $x = \mu = 20$ est un AXE de symétrie.



B) Propriété FONDAMENTALE :

Quels que soient les réels μ et σ, l'AIRE du domaine compris entre la courbe de f et l'axe des abscisses est égale à 1.

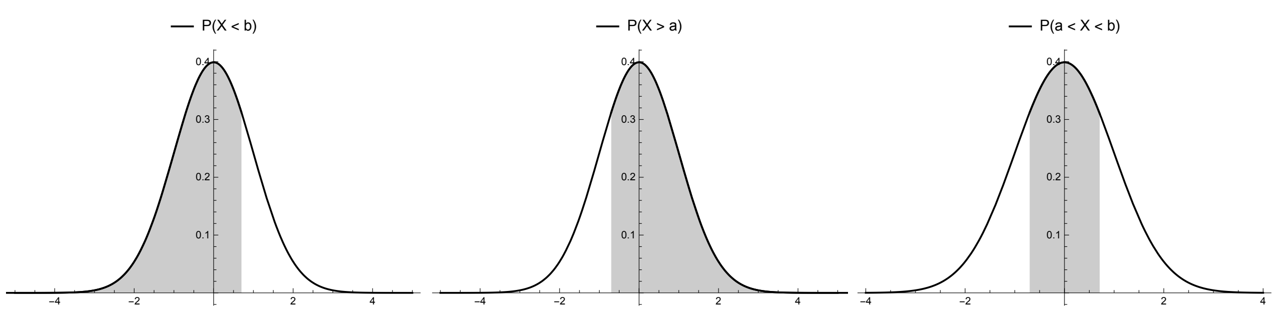
C) Loi NORMALE :

Définition :

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X, à valeurs dans $\mathbb{R}$, est appelée loi NORMALE de paramètres μ et σ lorsque, pour tous nombres a et b, la PROBABILITÉ de l'événement "$a \leq X \leq b$" est égal à l'AIRE du domaine délimité par la courbe de GAUSS, l'axe des abscisses et les droites verticales $x = a$ et $x = b$. On note cette loi $N(\mu;\sigma)$, loi NORMALE STANDARD.

Cas particulier : $\mu = 0$ et $\sigma = 1$, la loi $N(0;1)$ est appelée LOI NORMALE CENTRÉE RÉDUITE.

D) Représentation graphique des probabilités : Cas d'une loi normale centrée réduite : $\mu = 0$; $\sigma = 1$.



E) Espérance mathématique et écart-type : Propriété :

Soit X une V.A suivant une loi normale standard de paramètres μ et σ.
- L'espérance de la V.A X est : $E(X) = \mu$.
- L'écart-type de la V.A X est : $\sigma(X) = \sigma$.

F) Valeurs remarquables :

a) loi normale standard : $N(\mu; \sigma)$
- $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \sim 0,68$
- $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \sim 0,95$
- $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \sim 0,99$

b) loi normale centrée réduite : $N(0; 1)$: $\mu = 0\,;\, \sigma = 1$
- $P(-1,65 \leq X \leq +1,65) \sim 0,90$
- $P(-1,96 \leq X \leq +1,96) \sim 0,95$
- $P(-2,58 \leq X \leq +2,58) \sim 0,99$

G) Passage de la loi normale standard $N(\mu; \sigma)$ à la loi normale centrée réduite $N(0; 1)$:

Propriété :

Si X est une V.A suivant une loi $N(\mu; \sigma)$ alors la V.A $U = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ suit une loi $N(0; 1)$.

EXEMPLE : Soit une V.A X de paramètres $\mu = 50\,;\, \sigma = 10$ alors $X \sim N(50; 10)$.
Calculer $P(X \leq 60)$. On exprime l'événement "$X \leq 60$" en fonction de la V.A U.
On a :

$$X \leq 60 \;\Rightarrow\; X - 50 \leq 60 - 50 \;\Rightarrow\; X - 50 \leq 10 \;\Rightarrow\; \frac{X - 50}{10} \leq \frac{10}{10} \;\Rightarrow\; U \leq 1.$$

La V.A $U = \dfrac{X - 50}{10}$ suit une loi normale centrée réduite.
Donc : $P(X \leq 60) = P(U \leq 1)$.
On fait : normalFRép$(-10^{99}; 1) \sim 0,841$ à 10^{-3} près, donc, avec la même précision :

$$P(X \leq 60) \sim 0,841.$$

H) Loi NORMALE : utilisation de la calculatrice : TI 83 PREMIUM CE :

1) Cas de la loi Normale Centrée Réduite $N(0;1)$: $\mu = 0$; $\sigma = 1$

Calculs	Commandes	Touches calculatrice
$P(X \leq 0,5)$	normalFRép$(-10^{99}; 0,5) \sim 0,691$	Touche "distrib" (2nde VAR) puis normalFRép
$P(X > 2)$	normalFRép$(2; 10^{99}) \sim 0,023$	$\vdots$
$P(0,5 \leq X \leq 1,8)$	normalFRép$(0,5; 1,8) \sim 0,273$	$\vdots$

2) Cas de la loi normale Standard $N(\mu;\sigma)$

Calculs	Commandes	Touches calculatrice
$\mu = 0,25$ et $\sigma = 1$ $P(X \leq 0,5)$	normalFRép$(-10^{99}; 0,5; 0,25; 1) \sim 0,599$	Touche "distrib" (2nde VAR) puis normalFRép
$\mu = 0,25$ et $\sigma = 2$ $P(X \geq 0)$	normalFRép$(0; 10^{99}; 0,25; 2) \sim 0,55$	$\vdots$
$\mu = 4,5$ et $\sigma = 1,5$ $P(3 \leq X \leq 4,5)$	normalFRép$(3; 4,5; 4,5; 1,5) \sim 0,341$	$\vdots$

3) Soit la variable aléatoire U suivant une loi $N(0;1)$

• Trouver le nombre réel u tel que : $P(U \leq u) = k$.

Avec $k = 0,95$:

Calculs	Commandes	Touches calculatrice
$P(U \leq u) = 0,95$	Invnormale$(0,95) \sim 1,64$ donc $u \sim 1,64$	Touche "distrib" (2nde VAR) puis Invnormale

• Trouver le nombre réel u tel que : $P(-u \leq U \leq u) = k$.

Avec $k = 0,95$: On sait que $P(-u \leq U \leq u) = 2 \times P(U \leq u) - 1$. Donc

$$P(-u \leq U \leq u) = 0,95 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \times P(U \leq u) - 1 = 0,95 \quad \Leftrightarrow \quad P(U \leq u) = \frac{1+0,95}{2} = 0,975.$$

Calculs	Commandes	Touches calculatrice
$P(-u \leq U \leq u) = 0,95$ soit $P(U \leq u) = 0,975$	Invnormale$(0,975) \sim 1,96$ soit : $u \sim 1,96$ donc : $P(-1,96 \leq U \leq 1,96) = 0,95$	Touche "distrib" (2nde VAR) puis Invnormale

11 INTERVALLE DE FLUCTUATION ASYMPTOTIQUE ET INTERVALLE DE CONFIANCE

A) Intervalle de Fluctuation Asymptotique (I.F.A) :

La proportion p du caractère dans la population est CONNUE.

Définition :

On suppose que : $n \geq 30$; $n \times p \geq 5$ et $n \times (1-p) \geq 5$.
On appelle Intervalle de Fluctuation Asymptotique, au seuil de 95%, l'intervalle :

$$I_n = \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p \times (1-p)}{n}};\ p + 1,96\sqrt{\frac{p \times (1-p)}{n}}\right].$$

B) Règles de décision :

Soit f_{obs} la fréquence observée d'un ÉCHANTILLON de taille n.
2 cas :

- Si $f_{obs} \in I_n$ alors on ACCEPTE l'hypothèse faite sur p, au seuil de 95%.
- Si $f_{obs} \notin I_n$ alors on REJETTE l'hypothèse faite sur p, avec un RISQUE D'ERREUR de 5%.

C) Estimation de p par INTERVALLE DE CONFIANCE :

La proportion p est INCONNUE. On souhaite ESTIMER p.

Définition :

On suppose que : $n \geq 30$; $n \times f_{obs} \geq 5$ et $n \times (1 - f_{obs}) \geq 5$.
On appelle Intervalle de Confiance de p au niveau de confiance de $0,95$, l'intervalle :

$$I_c = \left[f_{obs} - 1,96\sqrt{\frac{f_{obs} \times (1-f_{obs})}{n}};\ f_{obs} + 1,96\sqrt{\frac{f_{obs} \times (1-f_{obs})}{n}}\right].$$

D) EXEMPLES :

1) Intervalle de fluctuation au seuil de 95% et prise de décision :

Un chef cuisinier décide d'ajouter un "menu terroir" à la carte de son restaurant. S'appuyant sur sa longue expérience, le restaurateur pense qu'environ 30% des clients choisiront ce menu. Ceci le conduit à faire l'hypothèse que la probabilité qu'un client, pris au hasard, commande le "menu terroir" est $p = 0,3$.

Afin de tester la validité de cette hypothèse, le restaurateur choisit au hasard 100 clients et observe que 26 d'entre eux ont choisi un "menu terroir". Après discussion avec son comptable, le restaurateur décide d'accepter l'hypothèse que $p = 0,3$ au seuil de 95%.

A l'aide d'un Intervalle de Fluctuation Asymptotique à 95%, justifier cette décision.

On a : $n = 100$ ("échantillon" de clients) et $p = 0,3$.

Par conséquent, on a $n = 100 \geq 30$; $np = 100 \times 0,3 = 30 \geq 5$ et
$n(1-p) = 100 \times (1-0,3) = 100 \times 0,7 = 70 \geq 5$.

Les 3 conditions sont réalisées donc on peut déterminer un Intervalle de Fluctuation Asymptotique à 95%.

$$\begin{aligned} I_{100} &= \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p \times (1-p)}{n}};\ p + 1,96\sqrt{\frac{p \times (1-p)}{n}}\right] \\ &= \left[0,3 - 1,96\sqrt{\frac{0,3 \times 0,7}{100}};\ 0,3 + 1,96\sqrt{\frac{0,3 \times 0,7}{100}}\right]. \end{aligned}$$

Soit $I_{100} \sim [0,21;\ 0,39]$. La fréquence observée dans l'échantillon de 100 clients est : $f_{obs} = \dfrac{26}{100} = 0,26$.
Or : $0,26 \in I_{100}$ donc : le restaurant a raison d'accepter l'hypothèse que $p = 0,3$.

2) Intervalle de confiance au niveau de confiance $0,95$:

On dispose d'un détecteur colorimétrique permettant d'écarter les "fruits" trop verts. Sur un échantillon de 200 pommes, tirées au hasard et avec remise, on a : 18 pommes trop vertes. On a donc : $f_{obs} = \dfrac{18}{200} = 0,09$.

On va calculer l'intervalle de confiance de la proportion p de pommes trop vertes dans la production totale au niveau de confiance $0,95$.

On vérifie les 3 conditions :
$n = 200 \geq 30$; $n \times f_{obs} = 200 \times 0,09 = 18 \geq 5$ et $n \times (1 - f_{obs}) = 200 \times 0,91 = 182 \geq 5$.

On détermine l'intervalle de confiance au niveau de confiance $0,95$.

$$\begin{aligned} I_c &= \left[f_{obs} - 1,96\sqrt{\frac{f_{obs} \times (1-f_{obs})}{n}};\ f_{obs} + 1,96\sqrt{\frac{f_{obs} \times (1-f_{obs})}{n}}\right] \\ &= \left[0,09 - 1,96 \times \sqrt{\frac{0,09 \times 0,91}{200}};\ 0,09 + 1,96 \times \sqrt{\frac{0,09 \times 0,91}{200}}\right]. \end{aligned}$$

Soit $I_c \sim [0,05;\ 0,13]$. On peut estimer la proportion p, au niveau de confiance $0,95$, comprise entre 5% et 13%.

12 SUITES ARITHMÉTIQUES ET GÉOMÉTRIQUES

A) Suites ARITHMÉTIQUES :

- Pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = u_n + r$, r est la raison.
- Si u_0 est le premier terme de la suite : $u_n = u_0 + n \times r$.
  D'une manière générale : $u_n = u_p + (n - p) \times r$.
- Si : $u_{n+1} - u_n =$ constante, alors la suite (u_n) est arithmétique, de raison égale à la constante.
- Somme des termes d'une suite arithmétique (u_n) :

$$S_n = (\text{nombre de termes}) \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}.$$

B) Suites GÉOMÉTRIQUES :

- Pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = u_n \times q$, q est la raison.
- Si u_0 est le premier terme de la suite : $u_n = u_0 \times q^n$.
  D'une manière générale : $u_n = u_p \times q^{n-p}$.
- Si, pour tout n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} =$ constante, alors la suite (u_n) est géometrique, de raison égale à la constante.
- Somme des termes d'une suite géométrique (u_n), de raison q :

$$S_n = \text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}.$$

C) Détermination du plus petit entier n tel que : $q^n \leq a$ (ou $q^n \geq a$) :

Méthode : On isole q^n et on utilise la propriété : $\ln q^n = n \times \ln q \quad (q > 0)$.

EXEMPLE : trouver n tel que : $0,8^n \leq 0,01$.

$$0,8^n \leq 0,01 \;\Rightarrow\; \ln 0,8^n \leq \ln 0,01 \;\Rightarrow\; n \times \ln 0,8 \leq \ln 0,01 \;\Rightarrow$$
$$n \geq \frac{\ln 0,01}{\ln 0,8} \text{ (attention : } \ln 0,8 < 0) \;\Rightarrow\; n \geq 20,64 \;\Rightarrow$$

le plus petit entier est : $n = 21$.

13 SUITES ET ALGORITHMIQUE : BOUCLE "TANT QUE"

BOUCLE "TANT QUE"

Rappel : structure de la boucle "Tant que".

TANT QUE condition FAIRE liste d'instructions FIN TANT QUE	$\Rightarrow$ la condition évaluée ne peut être que VRAIE ou FAUSSE $\Rightarrow$ si elle est VRAIE, la liste d'instruction est exécutée, puis la condition réévaluée. Si elle est FAUSSE, on SORT de la boucle.

EXERCICE :
En 2015, l'exploitant a produit 16 tonnes de maïs. Il augmente sa production de 3% par an à partir de 2015 dans le but de devenir autonome pour nourrir ses poulets.
On note u_n la masse, en tonnes, de maïs produite l'année $2015 + n$.

1) Valeur de u_0 et u_1 :

$n = 0$ correspond à l'année 2015 : $u_0 = 16$.
$n = 1$ correspond à l'année $2015 + 1 = 2016$: $u_1 = 1,03.u_0 = 1,03 \times 16 = 16,48$.
En effet, à une augmentation de 3%, correspond un coefficient multiplicateur de :

$$1 + \frac{3}{100} = 1 + 0,03 = 1,03.$$

2) Justifier que $u_{n+1} = 1,03.u_n$. Montrer que (u_n) est une suite géométrique.

Exprimer u_n en fonction de n.

La population augmente chaque année de 3%, la population de l'année $2015 + (n+1)$ sera celle de l'année $2015 + n$ multipliée par $1,03 \Rightarrow u_{n+1} = 1,03.u_n$.
La suite (u_n) est une suite géométrique, de raison $q = 1,03$ et de premier terme $u_0 = 16$.
On sait que : $u_n = u_0.q^n \Rightarrow u_n = 16 \times 1,03^n$.

3) Pour nourrir ses poulets, il lui faut produire une quantité de maïs de 21 tonnes.
a) Compléter l'algorithme permettant de déterminer à partir de quelle année sa production sera supérieure à 21

Variables :
U réel
N entier naturel
Initialisation :
Affecter à N la valeur 0
Affecter à U la valeur 16
Traitement :
Tant que $U \leq 21$
U prend la valeur $1,03 \times U$
N prend la valeur $N + 1$
Fin Tant que
Sortie : Afficher : N.

b) Valeur N, affichée par l'algorithme :

On sait que : $u_n = 16 \times 1,03^n$. On cherche n tel que : $16 \times 1,03^n > 21$ soit : $1,03^n > \dfrac{21}{16}$
et $1,03^n > 1,3125$.

1) Avec la calculatrice, par "tâtonnement" : $1,03^9 \sim 1,3048$ et $1,03^{10} \sim 1,3440$ donc $n = 10$.

2) Avec le logarithme népérien : $\ln 1,03^n > \ln 1,3125 \;\Rightarrow\; n \times \ln 1,03 > \ln 1,3125 \Rightarrow$
$n > \dfrac{\ln 1,3125}{\ln 1,03} \;\Rightarrow\; n > 9,2$.
Le plus petit entier est $n = 10$. L'algorithme affichera en sortie $N = 10$.