

Lois discrètes usuelles

Loi de Rademacher : X suit la loi de Rademacher $\mathcal{R}(a) \Leftrightarrow X(\Omega) = \{-a, a\}$,

$$\mathbb{P}(X = -a) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(X = a) = \frac{1}{2}.$$

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = 0, \quad \mathbb{V}(X) = a^2.$$

Loi uniforme (discrète) : X suit la loi uniforme $\mathcal{U}(\{m, \dots, n\}) \Leftrightarrow X(\Omega) = \{m, \dots, n\}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n+1-m}, \quad k \in \{m, \dots, n\}.$$

Quand $m = 1$, $X(\Omega) = \{1, \dots, n\}$ et

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}, \quad k \in \{1, \dots, n\}.$$

Espérance et variance pour le cas $m = 1$:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}, \quad \mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}, \quad G(s) = \frac{s}{n} \left(\frac{1-s^n}{1-s} \right).$$

Loi de Bernoulli : X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p) \Leftrightarrow X(\Omega) = \{0, 1\}$,

$$\mathbb{P}(X = 0) = 1-p, \quad \mathbb{P}(X = 1) = p.$$

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = p, \quad \mathbb{V}(X) = p(1-p), \quad G(s) = 1-p+sp.$$

Loi binomiale : X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p) \Leftrightarrow X(\Omega) = \{0, \dots, n\}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k \in \{0, \dots, n\}.$$

(On a $\mathcal{B}(1, p) = \mathcal{B}(p)$).

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = np, \quad \mathbb{V}(X) = np(1-p), \quad G(s) = (1-p+sp)^n.$$

Loi hypergéométrique : X suit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(a+b, n, \frac{a}{a+b}) \Leftrightarrow X(\Omega) = \{\max(0, n-b), \dots, \min(n, a)\}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{a}{k} \binom{b}{n-k}}{\binom{a+b}{n}}, \quad k \in \{\max(0, n-b), \dots, \min(n, a)\}.$$

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{na}{a+b}, \quad \mathbb{V}(X) = \frac{nab(a+b-n)}{(a+b)^2(a+b-1)}.$$

Loi géométrique : X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p) \Leftrightarrow X(\Omega) = \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}, \quad \mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}, \quad G(s) = \frac{ps}{1-(1-p)s}.$$

Loi de Pascal : X suit la loi de Pascal $\mathcal{G}(r, p) \Leftrightarrow X(\Omega) = \mathbb{N} - \{0, \dots, r-1\}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}, \quad k \in \mathbb{N} - \{0, \dots, r-1\}.$$

(On a $\mathcal{G}(1, p) = \mathcal{G}(p)$).

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{r}{p}, \quad \mathbb{V}(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}.$$

Loi binomiale négative : X suit la loi binomiale négative $\mathcal{B}_{neg}(r, p) \Leftrightarrow X(\Omega) = \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{k+r-1}{r-1} p^r (1-p)^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{r(1-p)}{p}, \quad \mathbb{V}(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}.$$

Loi de Poisson : X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda) \Leftrightarrow X(\Omega) = \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = \lambda, \quad \mathbb{V}(X) = \lambda, \quad G(s) = e^{\lambda(s-1)}.$$

Approximations

- si $a + b \geq 10n$ alors

$$\mathcal{H}\left(a + b, n, \frac{a}{a+b}\right) \approx \mathcal{B}(n, p).$$

- si $p \leq 0,1$, $n \geq 31$ et $np < 5$ alors

$$\mathcal{B}(n, p) \approx \mathcal{P}(np).$$

Modélisation

Schéma d'urne :

- *Tirages avec remise.* Une urne contient N boules dont N_1 sont blanches et $N_2 = N - N_1$ sont noires. On effectue des tirages au hasard et avec remise.

- La v.a.r. X égale au nombre de boules blanches obtenues en n tirages suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ avec $p = \frac{N_1}{N}$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{N_1}{N}\right)^k \left(1 - \frac{N_1}{N}\right)^{n-k}, \quad k \in \{0, \dots, n\}.$$

- La v.a.r. X égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule blanche suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ avec $p = \frac{N_1}{N}$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{N_1}{N} \left(1 - \frac{N_1}{N}\right)^{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

- La v.a.r. X égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir r boules blanches, $r \in \{1, \dots, N_1\}$, suit la loi de Pascal $\mathcal{G}(r, p)$ avec $p = \frac{N_1}{N}$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{k-1}{r-1} \left(\frac{N_1}{N}\right)^r \left(1 - \frac{N_1}{N}\right)^{k-r}, \quad k \in \mathbb{N} - \{0, \dots, r-1\}.$$

- La v.a.r. X égale au nombre de boules noires tirées avant d'obtenir r boules blanches, $r \in \{1, \dots, N_1\}$, suit la loi binomiale négative $\mathcal{B}_{neg}(r, p)$ avec $p = \frac{N_1}{N}$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{k+r-1}{r-1} \left(\frac{N_1}{N}\right)^r \left(1 - \frac{N_1}{N}\right)^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

- *Tirages simultanés.* Une urne contient N boules dont N_1 sont blanches et $N_2 = N - N_1$ sont noires. On tire au hasard et simultanément n boules de l'urne. La v.a.r. X égale au nombre de boules blanches obtenues suit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}\left(N_1 + N_2, n, \frac{N_1}{N_1 + N_2}\right)$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{N_1}{k} \binom{N_2}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad k \in \{\max(0, N_1), \dots, \min(n, N_2)\}.$$

Répétition d'expériences : On répète, dans les mêmes conditions, une même expérience aléatoire au cours de laquelle un événement A a une probabilité p d'être réalisé.

- La v.a.r. X égale au nombre de réalisations de l'événement A en n expériences suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k \in \{0, \dots, n\}.$$

- La v.a.r. X égale au nombre d'expériences nécessaires pour obtenir une réalisation de A suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$:

$$\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

- La v.a.r. X égale au nombre d'expériences nécessaires pour obtenir exactement r réalisations de A suit la loi de Pascal $\mathcal{G}(r, p)$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}, \quad k \in \mathbb{N} - \{0, \dots, r-1\}.$$

- La v.a.r. X égale au nombre de non réalisations de A avant r réalisations de A suit la loi binomiale négative $\mathcal{B}_{neg}(r, p)$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{k+r-1}{r-1} p^r (1-p)^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Lois continues usuelles

Loi uniforme continue : X suit la loi uniforme $\mathcal{U}([a, b]) \Leftrightarrow X(\Omega) = [a, b]$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}, \quad \mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Loi triangulaire continue : X suit la loi triangulaire $\mathcal{T}_{riang}(a) \Leftrightarrow X(\Omega) = [-a, a]$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a^2}(a - |x|) & \text{si } x \in [-a, a], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = 0, \quad \mathbb{V}(X) = \frac{a^2}{6}.$$

Loi parabolique : X suit la loi parabolique $\mathcal{P}_{arabol}(a) \Leftrightarrow X(\Omega) = [-a, a]$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4a^3}(a^2 - x^2) & \text{si } x \in [-a, a], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = 0, \quad \mathbb{V}(X) = \frac{a^2}{5}.$$

Loi beta : X suit la loi Beta $B(r, s) \Leftrightarrow X(\Omega) = [0, 1]$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta(r, s)} x^{r-1} (1-x)^{s-1} & \text{si } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\beta(r, s) = \int_0^1 t^{r-1} (1-t)^{s-1} dt$.

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{r}{r+s}, \quad \mathbb{V}(X) = \frac{rs}{(r+s)^2(r+s+1)}.$$

Loi de Laplace : X suit la loi de Laplace $\mathcal{L}(a) \Leftrightarrow X(\Omega) = \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{2a} e^{-\frac{|x|}{a}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = 0, \quad \mathbb{V}(X) = 2a^2.$$

Loi exponentielle : X suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda) \Leftrightarrow X(\Omega) = [0, \infty[$,

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Loi Gamma : X suit la loi Gamma $G(\lambda, m) \Leftrightarrow X(\Omega) = [0, \infty[$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^m}{\Gamma(m)} x^{m-1} e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\Gamma(m) = \int_0^\infty t^{m-1} e^{-t} dt$ (on a $\Gamma(m) = (m-1)!$ si $m \in \mathbb{N}^*$).

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{m}{\lambda}, \quad \mathbb{V}(X) = \frac{m}{\lambda^2}.$$

Loi de Cauchy : X suit la loi de Cauchy $\mathcal{C}(\mu, \lambda) \Leftrightarrow X(\Omega) = \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\lambda}{\pi (\lambda^2 + (x - \mu)^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = -, \quad \mathbb{V}(X) = -.$$

Loi de Pareto : X suit la loi de Pareto $\mathcal{P}_{ar}(a, \gamma, x_0) \Leftrightarrow X(\Omega) = [a + x_0, \infty[$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\gamma}{a} \left(\frac{a}{x - x_0} \right)^{\gamma+1} & \text{si } x \geq a + x_0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\gamma a}{\gamma - 1}, \quad \mathbb{V}(X) = \frac{\gamma a^2}{(\gamma - 1)^2 (\gamma - 2)}.$$

Loi normale : X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow X(\Omega) = \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = \mu, \quad \mathbb{V}(X) = \sigma^2.$$

Lorsque $\mu = 0$ et $\sigma = 1$, On dit que X suit la loi normale "centrée réduite".

Loi du Chi-deux : X suit la loi du Chi-deux $\chi^2(\nu) \Leftrightarrow X(\Omega) = [0, \infty[$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma(\frac{\nu}{2})} x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\Gamma(\frac{\nu}{2}) = \int_0^\infty t^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-t} dt$.

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = \nu, \quad \mathbb{V}(X) = 2\nu.$$

Loi de Student : X suit la loi de Student $\mathcal{T}(\nu) \Leftrightarrow X(\Omega) = \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\nu\pi}} \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{\nu} \right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

où, pour tout $\alpha \in \{\frac{\nu}{2}, \frac{\nu+1}{2}\}$, on a $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$.

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = 0, \quad \mathbb{V}(X) = \frac{\nu}{\nu-2}.$$

Loi de Fisher : X suit la loi de Fisher $\mathcal{F}(\nu_1, \nu_2) \Leftrightarrow X(\Omega) = [0, \infty[$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta\left(\frac{\nu_1}{2}, \frac{\nu_2}{2}\right) x} \left(\frac{\nu_1 x}{\nu_1 x + \nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}} \left(1 - \frac{\nu_1 x}{\nu_1 x + \nu_2}\right)^{\frac{\nu_2}{2}} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\beta\left(\frac{\nu_1}{2}, \frac{\nu_2}{2}\right) = \int_0^1 t^{\frac{\nu_1}{2}-1} (1-t)^{\frac{\nu_2}{2}-1} dt$.

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\nu_2}{\nu_2 - 2}, \quad \mathbb{V}(X) = \frac{2\nu_2^2(\nu_1 + \nu_2 - 2)}{\nu_1(\nu_2 - 2)^2(\nu_2 - 4)}.$$

Approximations

- si $n \geq 31$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$ alors

$$\mathcal{B}(n, p) \approx \mathcal{N}(np, np(1-p)).$$

- si $\lambda > 15$ alors

$$\mathcal{P}(\lambda) \approx \mathcal{N}(\lambda, \lambda).$$