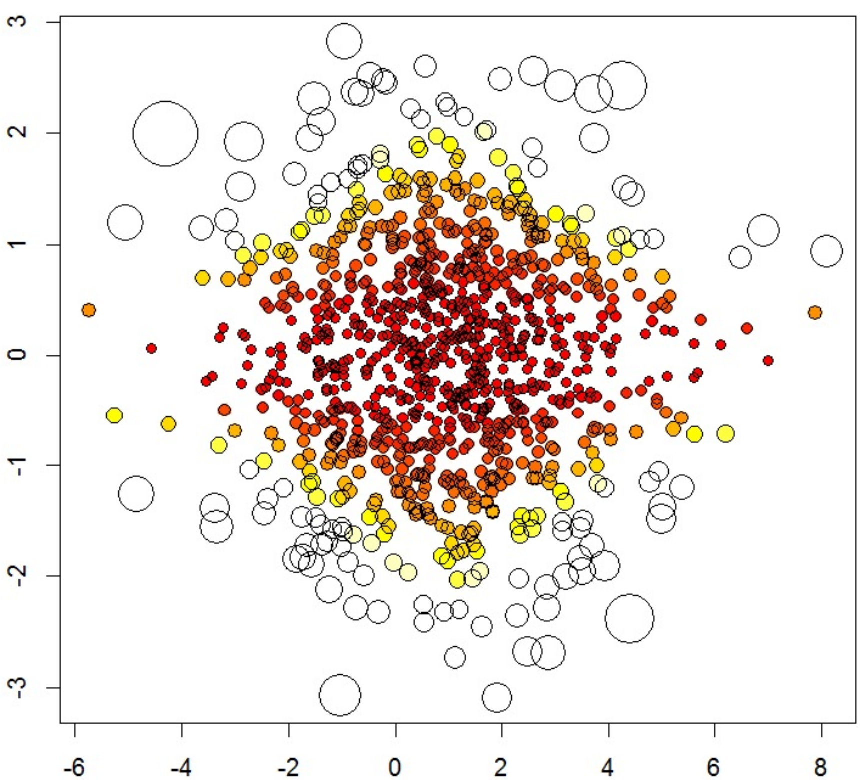
Université de Caen

Formulaire de Probabilités et Statistique

Christophe Chesneau

https://chesneau.users.lmno.cnrs.fr/



Caen, le 07 Mai 2018

Table des matières

∼ Note ∼

Ce document présente les principales formules brutes abordées dans le cours *Probabilités et Statistique* du L3 de l'université de Caen. Notes importantes :

- On suppose acquis les concepts de base sur les ensembles. Par exemple, voir :

  `https://chesneau.users.lmno.cnrs.fr/notions-de-base.pdf`

- Des points techniques ont volontairement été omis ; f, g, h, g_i désignent des fonctions sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$ … ou $\mathbb{R}^n$ selon le contexte ; lorsqu'une quantité est introduite (dérivé, somme, intégrale, espérance, variance …), il est supposé que celle-ci existe.

Je vous invite à me contacter pour tout commentaire :

christophe.chesneau@gmail.com

Quelques ressources en lien avec ce cours :

- Probabilités de Stéphane Ducay :
  `http://www.lamfa.u-picardie.fr/ducay/Accueil.html`
- Introduction aux Probabilités de Arnaud Guyader :
  `http://www.lsta.lab.upmc.fr/modules/resources/download/labsta/Pages/Guyader/IntroProba.pdf`
- Éléments de cours de Probabilités de Jean-François Marckert :
  `http://eric.univ-lyon2.fr/~ricco/cours/cours/La_regression_dans_la_pratique.pdf`
- Probabilités et Statistiques de Alain Yger :
  `https://www.math.u-bordeaux.fr/~ayger/Proba6031.pdf`
- Cours de Théorie des probabilités de Bruno Saussereau :
  `http://bsauss.perso.math.cnrs.fr/CTU-1314-SAUSSEREAU-THEORIE-DES-PROBABILITES.pdf`

Bonne lecture !

1 Dénombrement

Vocabulaires :

Notations	Vocabulaire	Notations	Vocabulaire
$\varnothing$	ensemble vide	$A \cup B$	réunion de A et B
Ω	ensemble plein	$A \cap B$	intersection de A et B
$\{\omega\}$	singleton de Ω	$A - B$	intersection de A et $\overline{B}$
A	partie de Ω	$A \cap B = \varnothing$	A et B sont disjoints
$\omega \in A$	ω appartient à A	$A \subseteq B$	A est inclus dans B
$\overline{A}$	complémentaire de A dans Ω	$A \times B$	produit cartésien de A et B

Exemple :

Ensemble	Définition	$A = \{a, b\}$, $B = \{b, c\}$, $\Omega = \{a, b, c\}$
$\overline{A}$	$\{x \in \Omega;\ x \notin A\}$	$\{c\}$
$A \cup B$	$\{x \in \Omega;\ x \in A \text{ ou } x \in B\}$	$\{a, b, c\}$
$A \cap B$	$\{x \in \Omega;\ x \in A \text{ et } x \in B\}$	$\{b\}$
$A - B$	$\{x \in \Omega;\ x \in A \text{ et } x \notin B\}$	$\{a\}$
$A \times B$	$\{(x, y);\ x \in A \text{ et } y \in B\}$	$\{(a, b), (a, c), (b, b), (b, c)\}$

Opérations :

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \qquad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C),$$

$$\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \right) \cap B = \bigcup_{k=1}^{n} (A_k \cap B), \qquad \left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k \right) \cup B = \bigcap_{k=1}^{n} (A_k \cup B).$$

Lois de Morgan :

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B},$$

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{A}_k, \qquad \overline{\bigcap_{k=1}^{n} A_k} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{A}_k.$$

Partition : $(A_k)_{k\in\{1,\ldots,n\}}$ partition de Ω $\Leftrightarrow$ $(A_k)_{k\in\{1,\ldots,n\}}$ disjoints deux à deux et $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k = \Omega$.

Cardinal : Le nombre des éléments d'un ensemble fini A est appelé cardinal de A. Il est noté $\mathrm{Card}(A)$.

Formule du crible (à l'ordre 2) :

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B).$$

Formule du crible (à l'ordre n) :

$$\mathrm{Card}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum \ldots \sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in U_k} \mathrm{Card}\left(\bigcap_{u=1}^{k} A_{i_u}\right),$$

où $U_k = \{(i_1, \ldots, i_k) \in \{1, \ldots, n\}^k;\ \ i_1 < \cdots < i_k\}$.

Propriétés :

$$\mathrm{Card}(\varnothing) = 0, \qquad A \cap B = \varnothing \Rightarrow \mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B),$$

$$\mathrm{Card}(\overline{A}) = \mathrm{Card}(\complement_\Omega A) = \mathrm{Card}(\Omega) - \mathrm{Card}(A), \qquad \mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(A \cap B) + \mathrm{Card}(A \cap \overline{B}),$$

$$\mathrm{Card}(A - B) = \mathrm{Card}(A) - \mathrm{Card}(A \cap B), \qquad A \subseteq B \Rightarrow \mathrm{Card}(A) \leq \mathrm{Card}(B),$$

$$\mathrm{Card}(A \times B) = \mathrm{Card}(A)\,\mathrm{Card}(B).$$

Principe additif : On considère une situation qui nous amène à faire un choix parmi n cas différents et exclusifs : le cas 1, ou le cas 2. . . , ou le cas n. Si, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, il y a u_k possibilités pour le k-ème cas, alors le nombre total de possibilités est $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

Principe multiplicatif : On considère une situation conjuguant k étapes : une étape 1, et une étape 2..., et une étape k. Si, pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, il y a n_i possibilités pour la k-ème étape, alors le nombre total de possibilités est $\prod_{i=1}^{k} n_i$.

Liste : Liste ordonnée d'éléments avec répétitions.

Arrangement : Liste ordonnée d'éléments sans répétition.

Permutation : Arrangement de n éléments parmi n.

Combinaison : Partie d'un ensemble ; l'ordre n'est pas pris en compte.

Exemple : choix de 2 éléments parmi $\Omega = \{a, b, c\}$:

Choix	avec répétition	sans répétition
avec ordre	Listes : $\left.\begin{array}{ccc} (a,a) & (a,b) & (a,c) \\ (b,a) & (b,b) & (b,c) \\ (c,a) & (c,b) & (c,c) \end{array}\right\} 9$	Arrangements : $\left.\begin{array}{cc} (a,b) & (a,c) \\ (b,a) & (b,c) \\ (c,a) & (c,b) \end{array}\right\} 6$
sans ordre	Combinaisons avec répétitions : $\left.\begin{array}{ccc} [a,a] & [a,b] & [a,c] \\ [b,b] & [b,c] & [c,c] \end{array}\right\} 6$	Combinaisons : $\left.\begin{array}{ccc} \{a,b\} & \{a,c\} & \{b,c\} \end{array}\right\} 3$

Les permutations des éléments des 3 éléments de Ω sont : (a, b, c), (b, a, c), (a, c, b), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a). Il y en a 6.

Nombre de listes : Le nombre de listes possibles de k éléments parmi n est n^k.

Factorielle : On appelle factorielle n l'entier :

$$n! = 1 \times 2 \times \ldots \times (n-1) \times n = \prod_{i=1}^{n} k.$$

On pose $0! = 1$.

Nombre de permutations : Le nombre de permutations de n éléments est $n!$.

Nombre d'arrangements : On appelle nombre d'arrangements "k parmi n" l'entier :

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

C'est le nombre d'arrangements possibles de k éléments parmi n.

Coefficient binomial : On appelle coefficient binomial "k parmi n" l'entier :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Si $k \notin \{0, \ldots, n\}$, on pose $\binom{n}{k} = 0$.

Nombre de combinaisons : Le nombre de combinaisons possibles de k éléments parmi n est $\binom{n}{k}$.

2 Calculs utiles

Propriétés du coefficient binomial :

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}, \qquad k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}, \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Formule du binôme de Newton :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Formule de Vandermonde :

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j}\binom{m}{k-j} = \binom{n+m}{k}.$$

Somme des n premiers entiers, de leurs carrés et de leurs cubes :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Somme des n premiers termes d'une suite géométrique :

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{si } x \in \mathbb{R} - \{1\}, \\ n+1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Série géométrique et ses dérivées :

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}, \qquad x \in]-1,1[.$$

Série géométrique et ses dérivées ; généralisation :

$$\sum_{k=m}^{\infty} \prod_{i=0}^{m-1} (k-i) x^{k-m} = \frac{m!}{(1-x)^{m+1}}, \qquad x \in]-1,1[.$$

Formule du binôme négatif :

$$\sum_{k=r}^{\infty} \binom{k}{r} x^{k-r} = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}, \qquad x \in]-1,1[.$$

Série entière de la fonction exponentielle :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Sommes doubles :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \right), \qquad \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{i} a_{i,j} \right) = \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{i=j}^{n} a_{i,j} \right).$$

3 Espaces probabilisés et probabilités

Expérience aléatoire : On appelle expérience aléatoire toute expérience dont on connaît parfaitement les conditions mais dont on ne peut pas prévoir l'issue. Elle est notée $\mathcal{E}$.

Univers : On appelle univers d'une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ l'ensemble des issues possibles. Un univers est noté Ω.

Événement : On appelle événement toute partie de l'univers Ω. Les événements sont notés par des lettres majuscules : A, B, $C\ldots$

On dit qu'un événement A se réalise (ou est réalisé) lors d'une expérience aléatoire si et seulement si l'issue de cette expérience aléatoire appartient à A.

Vocabulaires :

Notations	Lire	Vocabulaires
$\varnothing$	.	événement impossible
Ω	grand omega	univers (ou événement certain)
ω	omega	issue
$\{\omega\}$	singleton omega	événement élémentaire
A	.	événement
$\omega \in A$	omega dans A	ω est une réalisation possible de A
$\overline{A}$	A barre	événement contraire de A
$A \cup B$	A union B	réalisation de A, ou B, ou les deux
$A \cap B$	A inter B	réalisation de A et B
$A - B$	A privé de B	réalisation de A et $\overline{B}$
$A \cap B = \varnothing$	.	A et B sont incompatibles
$A \subset B$	A inclus dans B	A implique B

Toutes les opérations vues sur les ensembles sont aussi valables pour les événements. En particulier, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} =$ "ni A, ni B se réalise" et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Système complet d'événements : $(A_k)_{k\in\{1,\ldots,n\}}$ forme un système complet d'événements $\Leftrightarrow$

$(A_k)_{k\in\{1,\ldots,n\}}$ sont incompatibles deux à deux et $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega$.

Tribu : On dit que $\mathcal{A}$ est une tribu de l'univers Ω si, et seulement si,

- $\Omega \in \mathcal{A}$,
- pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\overline{A} \in \mathcal{A}$,
- pour toute famille d'événements $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A_k \in \mathcal{A}$, on a $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.

Si Ω est fini ou infini dénombrable, on prend $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ (l'ensemble des parties de Ω).

Probabilité $\mathbb{P}$: On appelle probabilité définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ telle que :

- pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(A) \in [0, 1]$,
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
- pour toute suite d'événements $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ incompatibles deux à deux,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k).$$

Si Ω est fini, on peut remplacer le dernier point par : $A \cap B = \varnothing \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Le réel $\mathbb{P}(A)$, prononcer "P de A", est la probabilité que l'événement A se réalise.

Probabilité sur un univers dénombrable : Soient Ω un univers fini ou infini dénombrable (comme, par exemple, $\Omega = \mathbb{N}$), et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω. Si l'application $\mathbb{Q} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ vérifie :

- pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathbb{Q}(\{\omega\}) \geq 0$,
- $\sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{Q}(\{\omega\}) = 1$,
- pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{Q}(A) = \sum_{\omega\in A} \mathbb{Q}(\{\omega\})$,

alors $\mathbb{Q}$ est une probabilité définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Espace probabilisé : Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est appelé espace probabilisé.

Propriétés :

$$\mathbb{P}(\varnothing) = 0, \qquad A \cap B = \varnothing \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B), \qquad \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A),$$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B}), \qquad A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B).$$

Formule d'inclusion-exclusion :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Formule d'inclusion-exclusion (à 3 termes) :

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).$$

Formule d'inclusion-exclusion (à n termes) :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \sum \dots \sum_{(i_1,\dots,i_k)\in U_k} \mathbb{P}\left(\bigcap_{u=1}^{k} A_{i_u}\right),$$

où $U_k = \{(i_1,\dots,i_k) \in \{1,\dots,n\}^k;\ \ i_1 < \dots < i_k\}$.

Cas particulier : $(A_k)_{k\in\{1,\dots,n\}}$ incompatibles deux à deux $\Rightarrow$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k).$$

Inégalité : On a toujours

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k).$$

Propriétés de limite monotone :

$$A_{n+1} \subset A_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right),$$

$$A_n \subset A_{n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

Équiprobabilité : Si aucun événement élémentaire n'a plus de chance de se réaliser que les autres, on dit qu'il y a équiprobabilité.

Probabilité uniforme : Si Ω est fini et qu'il y a équiprobabilité, alors on peut considérer l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$, où $\mathbb{P}$ désigne la probabilité uniforme définie par

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}, \qquad A \in \mathcal{A}.$$

Autrement écrit, on a $\mathbb{P}(A) = \dfrac{\text{Nombre d'événements élémentaires formant } A}{\text{Nombre d'événements élémentaires formant } \Omega}$.

4 Probabilités conditionnelles et indépendance

Probabilité (conditionnelle) de A sachant B : L'application $\mathbb{P}_B : \mathcal{A} \to [0,1]$ définie par

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}, \qquad A \in \mathcal{A},$$

est une probabilité.

Le réel $\mathbb{P}_B(A)$, prononcer "P de A sachant B", est la probabilité que l'événement A se réalise sachant que l'événement B est réalisé (avec $\mathbb{P}(B) \neq 0$).

Retournement du conditionnement :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = c\mathbb{P}_A(B), \quad \text{avec} \quad c = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Formule des probabilités composées (à l'ordre 3) :

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}_{A\cap B}(C).$$

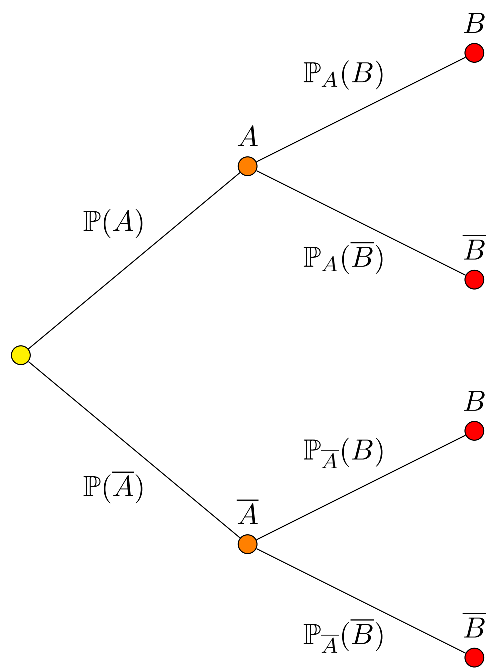
Formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}_{\overline{B}}(A)\mathbb{P}(\overline{B}).$$

Formule de Bayes :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}_{\overline{A}}(B)\mathbb{P}(\overline{A})}.$$

Arbre de probabilité : Un arbre de probabilité est un schéma permettant de résumer une expérience aléatoire. Il sert à calculer des probabilités. La construction d'arbre de probabilité avec deux événements A et B est



Le vocabulaire associé est assez intuitif (branche, nœud, chemin...).

Ainsi, la pondération de la branche allant du nœud A vers le nœud B est la probabilité que B se réalise sachant que A est réalisé : $\mathbb{P}_A(B)$. Cet arbre possède les particularités suivantes :

- La somme des probabilités sur les branches d'un même nœud vaut 1. Par exemple : $\mathbb{P}(\overline{A}) + \mathbb{P}(A) = 1$.
- La "probabilité d'un chemin" ($\mathbb{P}(A \cap B)$, $\mathbb{P}(A \cap \overline{B})$...) est le produit des probabilités de ses branches. Par exemple : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A)$.
- *Conséquence de la formule des probabilités totales :* La probabilité qu'un évènement se réalise est la somme des probabilités des chemins qui y amènent. Par exemple : $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B})$.

Formule des probabilités composées (à l'ordre n) :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \mathbb{P}(A_1) \prod_{i=2}^{n} \mathbb{P}_{\bigcap\limits_{k=1}^{i-1} A_k}(A_i).$$

Formule des probabilités totales (à l'ordre n) : $(A_k)_{k\in\{1,\ldots,n\}}$ système complet d'événements $\Rightarrow$

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_{A_k}(B)\mathbb{P}(A_k).$$

Formule de Bayes (à l'ordre n) : $(A_k)_{k\in\{1,\ldots,n\}}$ système complet d'événements $\Rightarrow$

$$\mathbb{P}_B(A_i) = \frac{\mathbb{P}_{A_i}(B)\mathbb{P}(A_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}_{A_k}(B)\mathbb{P}(A_k)}.$$

Indépendance :

- A et B indépendants $\Leftrightarrow$

$$\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B).$$

- A et B indépendants $\Leftrightarrow$ $\overline{A}$ et B indépendants $\Leftrightarrow$ A et $\overline{B}$ indépendants $\Leftrightarrow$ $\overline{A}$ et $\overline{B}$ indépendants
- $(A_k)_{k\in\{1,\ldots,n\}}$ indépendants deux à deux $\Leftrightarrow$ pour tout $(k,l)\in\{1,\ldots,n\}^2$ avec $k\neq l$,

$$\mathbb{P}(A_k\cap A_l) = \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(A_l).$$

- $(A_k)_{k\in\{1,\ldots,n\}}$ indépendants $\Leftrightarrow$ pour tout $I\subseteq\{1,\ldots,n\}$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k\in I} A_k\right) = \prod_{k\in I}\mathbb{P}(A_k).$$

Dorénavant, on suppose construit un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ adapté à l'expérience aléatoire sous-jacente.

5 Variables aléatoires réelles (*var*) discrètes

Variable aléatoire réelle (*var*) : Une *var* X est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\{X \leq x\} = \{\omega \in \Omega;\ X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$.

Support d'une *var* : Le support d'une *var* X est l'ensemble des valeurs atteintes par X.

Il est noté $X(\Omega)$.

Loi d'une *var* : La loi d'une *var* X est la probabilité $\mathbb{P}_X$ définie par

$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega;\ X(\omega) \in A\})$, $A \subseteq \mathbb{R}$.

***Var* discrète :**

- On appelle *var* discrète toute *var* prenant un ensemble de valeurs fini, ou infini dénombrable.
- La loi d'une *var* discrète X est donnée par

$$\mathbb{P}(X = k), \qquad k \in X(\Omega),$$

  où $\mathbb{P}(X = k)$ désigne la probabilité que l'événement $\{X = k\} = \{\omega \in \Omega;\ X(\omega) = k\}$ se réalise.

Propriétés :

$$\sum_{k \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = k) = 1, \qquad \mathbb{P}(X \in \mathcal{D}) = \sum_{k \in X(\Omega) \cap \mathcal{D}} \mathbb{P}(X = k).$$

Exemples :

On adopte la notation : $X \sim \ldots \ \Leftrightarrow \ X$ suit la loi ...

Loi	uniforme	de Bernoulli	binomiale	géométrique	de Poisson
paramètres	$n \in \mathbb{N}^*$	$p \in]0, 1[$	$n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0, 1[$	$p \in]0, 1[$	$\lambda > 0$
$X \sim$	$\mathcal{U}(\{1, \ldots, n\})$	$\mathcal{B}(p)$	$\mathcal{B}(n, p)$	$\mathcal{G}(p)$	$\mathcal{P}(\lambda)$
$X(\Omega)\ \ (k \in)$	$\{1, \ldots, n\}$	$\{0, 1\}$	$\{0, \ldots, n\}$	$\mathbb{N}^*$	$\mathbb{N}$
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{n}$	p si $k = 1$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	$p(1-p)^{k-1}$	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

Caractérisation : q_k, $k \in \mathcal{D}$, caractérise la loi d'une *var* discrète $\Leftrightarrow$ $q_k \geq 0$, et

$$\sum_{k \in \mathcal{D}} q_k = 1.$$

Loi et probabilité uniforme : $\mathbb{P}$ probabilité uniforme $\Rightarrow$

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\mathrm{Card}(\{X = k\})}{\mathrm{Card}(\Omega)}, \qquad k \in X(\Omega).$$

Égalité en loi : X et Y suivent la même loi $\Leftrightarrow$ $X(\Omega) = Y(\Omega)$ et

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k), \qquad k \in X(\Omega).$$

Fonction de répartition :

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{k \in]-\infty, x] \cap X(\Omega)} \mathbb{P}(X = k), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Fonction de répartition et loi : Pour tout $k \in X(\Omega)$, on a

$$\mathbb{P}(X = k) = F(k) - F(k_*),$$

où k_* est la plus grande valeur de $X(\Omega)$ vérifiant $k_* < k$.

Espérance :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \mathbb{P}(X = k).$$

Formule du transfert :

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{k \in X(\Omega)} g(k) \mathbb{P}(X = k).$$

Propriétés :

- $\mathbb{E}(a) = a$,
- $X(\Omega) \subseteq [0, \infty[\ \Rightarrow \ \mathbb{E}(X) \geq 0$,
- $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$,

- $\mathbb{E}(aX^2 + bX + c) = a\mathbb{E}(X^2) + b\mathbb{E}(X) + c$.

Moment d'ordre p :

$$m_p = \mathbb{E}(X^p) = \sum_{k \in X(\Omega)} k^p \mathbb{P}(X = k).$$

Variance :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2).$$

Propriétés :

- $\mathbb{V}(X) \geq 0$,
- $\mathbb{V}(X) = 0 \;\Leftrightarrow\; X$ est une *var* constante,
- $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$.

Formule de König-Huyghens :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2.$$

Exemples :

$X \sim$	$\mathcal{U}(\{1,\ldots,n\})$	$\mathcal{B}(p)$	$\mathcal{B}(n,p)$	$\mathcal{G}(p)$	$\mathcal{P}(\lambda)$
$\mathbb{E}(X)$	$\frac{n+1}{2}$	p	np	$\frac{1}{p}$	λ
$\mathbb{V}(X)$	$\frac{n^2-1}{12}$	$p(1-p)$	$np(1-p)$	$\frac{1-p}{p^2}$	λ

Écart-type :

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}.$$

Inégalité de Markov : Soit $h : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ une fonction croissante. Pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$\mathbb{P}(|X| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(h(|X|))}{h(\epsilon)}.$$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev : Pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\epsilon^2}.$$

Fonction génératrice :

$$G(s) = \mathbb{E}(s^X) = \sum_{k \in X(\Omega)} s^k \mathbb{P}(X = k), \qquad s \in [-1, 1].$$

Fonction génératrice et ses dérivées :

$$G'(s) = \mathbb{E}(X s^{X-1}), \qquad G''(s) = \mathbb{E}(X(X-1)s^{X-2}), \qquad G^{(k)}(s) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=0}^{k-1}(X-i)s^{X-k}\right).$$

Propriétés :

$$\mathbb{E}(X) = G'(1), \qquad \mathbb{V}(X) = G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2.$$

Fonction génératrice et loi :

- Si $X(\Omega) \subseteq \mathbb{N}$ et
$$G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k,$$
alors $X(\Omega) = \{k \in \mathbb{N};\ a_k \neq 0\}$ et la loi de X est donnée par
$$\mathbb{P}(X = k) = a_k, \qquad k \in X(\Omega).$$
- Si $X(\Omega) \subseteq \mathbb{N}$, alors $X(\Omega) = \{m \in \mathbb{N};\ G^{(m)}(0) \neq 0\}$ et la loi de X est donnée par
$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{G^{(k)}(0)}{k!}, \qquad k \in X(\Omega).$$

Fonction génératrice et égalité en loi : X et Y suivent la même loi $\Leftrightarrow$ $G_X(s) = G_Y(s)$ pour tout $s \in [-1, 1]$.

Exemples :

$X \sim$	$\mathcal{U}(\{1, \ldots, n\})$	$\mathcal{B}(p)$	$\mathcal{B}(n, p)$	$\mathcal{G}(p)$	$\mathcal{P}(\lambda)$
$G(s)$	$\frac{s}{n}\left(\frac{1-s^n}{1-s}\right)$	$1 + p(s-1)$	$(1 + p(s-1))^n$	$\frac{ps}{1-(1-p)s}$	$e^{\lambda(s-1)}$

6 Lois discrètes usuelles

Loi de Rademacher : X suit la loi de Rademacher $\mathcal{R}(a)$, $a > 0 \;\Leftrightarrow\; X(\Omega) = \{-a, a\}$,

$$\mathbb{P}(X = -a) = \frac{1}{2}, \qquad \mathbb{P}(X = a) = \frac{1}{2}.$$

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = 0, \qquad \mathbb{V}(X) = a^2.$$

Loi uniforme (discrète) : X suit la loi uniforme $\mathcal{U}(\{m, \ldots, n\})$, $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$, $m < n \;\Leftrightarrow$

$X(\Omega) = \{m, \ldots, n\}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n + 1 - m}, \qquad k \in \{m, \ldots, n\}.$$

Quand $m = 1$, $X(\Omega) = \{1, \ldots, n\}$ et

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}, \qquad k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Espérance et variance pour le cas $m = 1$:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n + 1}{2}, \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{n^2 - 1}{12}.$$

Loi de Bernoulli : X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, $p \in]0, 1[\;\Leftrightarrow\; X(\Omega) = \{0, 1\}$,

$$\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p, \qquad \mathbb{P}(X = 1) = p.$$

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = p, \qquad \mathbb{V}(X) = p(1 - p).$$

Loi binomiale : X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0,1[\;\Leftrightarrow\; X(\Omega) = \{0,\ldots,n\}$,

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k \in \{0,\ldots,n\}.$$

(On a $\mathcal{B}(1,p) = \mathcal{B}(p)$).

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = np, \qquad \mathbb{V}(X) = np(1-p).$$

Loi hypergéométrique : X suit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(l,m,n)$, $(l,m,n) \in (\mathbb{N}^*)^3 \;\Leftrightarrow$

$X(\Omega) \subseteq \{0,\ldots,n\}$,

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{\binom{l}{k}\binom{m}{n-k}}{\binom{m+l}{n}}, \qquad k \in \{0,\ldots,n\}.$$

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{nl}{l+m}, \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{nlm(l+m-n)}{(l+m)^2(l+m-1)}.$$

Loi géométrique : X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p) \;\Leftrightarrow\; X(\Omega) = \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X=k) = p(1-p)^{k-1}, \qquad k \in \mathbb{N}^*.$$

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}, \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Loi de Pascal : X suit la loi de Pascal $\mathcal{G}(r,p)$, $r \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0,1[\;\Leftrightarrow\; X(\Omega) = \mathbb{N} - \{0,\ldots,r-1\}$,

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}, \qquad k \in \mathbb{N} - \{0,\ldots,r-1\}.$$

(On a $\mathcal{G}(1,p) = \mathcal{G}(p)$).

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{r}{p}, \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}.$$

Loi binomiale négative : X suit la loi binomiale négative $\mathcal{B}_{neg}(r,p)$, $r \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0,1[\ \Leftrightarrow \ X(\Omega) = \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{k+r-1}{r-1} p^r (1-p)^k, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{r(1-p)}{p}, \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}.$$

Loi de Poisson : X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0 \ \Leftrightarrow \ X(\Omega) = \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = \lambda, \qquad \mathbb{V}(X) = \lambda.$$

Approximations

- Si $p = \dfrac{l}{l+m}$ et $n \leq \dfrac{l+m}{10}$, alors

$$\mathcal{H}(l,m,n) \approx \mathcal{B}(n,p),$$

- Si $n \geq 31$ et $np \leq 10$, alors

$$\mathcal{B}(n,p) \approx \mathcal{P}(np).$$

7 Modélisation

Schéma d'urne :

- *Tirages avec remise.* Une urne contient N boules dont N_1 sont blanches et $N_2 = N - N_1$ sont noires. On effectue des tirages au hasard et avec remise.
  - La *var* X égale au nombre de boules blanches obtenues en n tirages suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ avec $p = \frac{N_1}{N}$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{N_1}{N}\right)^k \left(1 - \frac{N_1}{N}\right)^{n-k}, \qquad k \in \{0, \ldots, n\}.$$

  - La *var* X égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir pour la première fois une boule blanche suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ avec $p = \frac{N_1}{N}$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{N_1}{N} \left(1 - \frac{N_1}{N}\right)^{k-1}, \qquad k \in \mathbb{N}^*.$$

  - La *var* X égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir r boules blanches, $r \in \{1, \ldots, N_1\}$, suit la loi de Pascal $\mathcal{G}(r,p)$ avec $p = \frac{N_1}{N}$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{k-1}{r-1} \left(\frac{N_1}{N}\right)^r \left(1 - \frac{N_1}{N}\right)^{k-r}, \qquad k \in \mathbb{N} - \{0, \ldots, r-1\}.$$

  - La *var* X égale au nombre de boules noires tirées avant d'obtenir r boules blanches, $r \in \{1, \ldots, N_1\}$, suit la loi binomiale négative $\mathcal{B}_{neg}(r,p)$ avec $p = \frac{N_1}{N}$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{k+r-1}{r-1} \left(\frac{N_1}{N}\right)^r \left(1 - \frac{N_1}{N}\right)^k, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

- *Tirages simultanés.* Une urne contient N boules dont N_1 sont blanches et $N_2 = N - N_1$ sont noires.

On tire au hasard et simultanément n boules de l'urne. La *var* X égale au nombre de boules blanches obtenues suit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N_1, N_2, n)$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \qquad k \in \{0, \ldots, n\}.$$

Répétition d'expériences : On répète, dans les mêmes conditions, une même expérience aléatoire au cours de laquelle un événement A a une probabilité p d'être réalisé.

- La *var* X égale au nombre de réalisations de l'événement A en n expériences (indépendantes) suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k \in \{0, \ldots, n\}.$$

- La *var* X égale au nombre d'expériences (indépendantes) nécessaires pour obtenir une réalisation de A suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$:

$$\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}, \qquad k \in \mathbb{N}^*.$$

- La *var* X égale au nombre d'expériences (indépendantes) nécessaires pour obtenir exactement r réalisations de A suit la loi de Pascal $\mathcal{G}(r, p)$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}, \qquad k \in \mathbb{N} - \{0, \ldots, r-1\}.$$

- La *var* X égale au nombre d'expériences (indépendantes) nécessaires pour que A ne se réalise pas avant r réalisations de A suit la loi binomiale négative $\mathcal{B}_{neg}(r, p)$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{k+r-1}{r-1} p^r (1-p)^k, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

8 Couples de *var* discrètes

Couple de *var* : Soient X et Y deux *var*. On appelle couple de *var* l'application $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ vérifiant $(X, Y)(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))$, $\omega \in \Omega$.

Support d'un couple de *var* : Le support d'un couple de *var* (X, Y) est l'ensemble des valeurs atteintes par (X, Y). Il est noté $(X, Y)(\Omega)$.

Loi d'un couple de *var* : La loi d'un couple de *var* (X, Y) est la probabilité $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ définie par $\mathbb{P}_{(X,Y)}(A) = \mathbb{P}((X, Y) \in A) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega;\ (X, Y)(\omega) \in A\})$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$.

Couple de *var* discrètes :

- On appelle couple de *var* discrètes tout couple de *var* (X, Y) prenant un ensemble de valeurs fini, ou infini dénombrable. Dès lors, X est une *var* discrète et Y aussi.
- La loi d'une couple de *var* discrètes (X, Y) est donnée par

$$\mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\}), \qquad (i, j) \in (X, Y)(\Omega).$$

On la présente parfois sous la forme d'un tableau quand cela est possible.

Propriétés :

$$\sum\sum_{(i,j)\in(X,Y)(\Omega)} \mathbb{P}(\{X = i\}\cap\{Y = j\}) = 1, \quad \mathbb{P}((X, Y) \in \mathcal{D}) = \sum\sum_{(i,j)\in(X,Y)(\Omega)\cap\mathcal{D}} \mathbb{P}(\{X = i\}\cap\{Y = j\}).$$

Caractérisation : $q_{i,j}$, $(i, j) \in \mathcal{D}$, caractérise la loi d'un couple de *var* discrètes $\Leftrightarrow$ $q_{i,j} \geq 0$ et

$$\sum\sum_{(i,j)\in\mathcal{D}} q_{i,j} = 1.$$

Loi et probabilité uniforme : $\mathbb{P}$ probabilité uniforme $\Rightarrow$

$$\mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) = \frac{\mathrm{Card}(\{X = i\} \cap \{Y = j\})}{\mathrm{Card}(\Omega)}, \qquad (i, j) \in (X, Y)(\Omega).$$

Loi et probabilité conditionnelle :

$$\mathbb{P}(\{X=i\}\cap\{Y=j\}) = \begin{cases} \mathbb{P}_{\{Y=j\}}(X=i)\mathbb{P}(Y=j), \\ \mathbb{P}_{\{X=i\}}(Y=j)\mathbb{P}(X=i), \end{cases} \qquad (i,j)\in(X,Y)(\Omega).$$

Fonction de répartition :

$$F(x,y)=\mathbb{P}(\{X\le x\}\cap\{Y\le y\}), \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Lois marginales :

- On a $X(\Omega)=\bigcup_{j\in\mathbb{R}}\{i\in\mathbb{R};\ \mathbb{P}(\{X=i\}\cap\{Y=j\})\neq 0\}$,
  la loi de X est donnée par

$$\mathbb{P}(X=i)=\sum_{j\in Y(\Omega)}\mathbb{P}(\{X=i\}\cap\{Y=j\}), \qquad i\in X(\Omega).$$

- On a $Y(\Omega)=\bigcup_{i\in\mathbb{R}}\{j\in\mathbb{R};\ \mathbb{P}(\{X=i\}\cap\{Y=j\})\neq 0\}$,
  la loi de Y est donnée par

$$\mathbb{P}(Y=j)=\sum_{i\in X(\Omega)}\mathbb{P}(\{X=i\}\cap\{Y=j\}), \qquad j\in Y(\Omega).$$

Indépendance de 2 *var* discrètes : X et Y indépendantes $\Leftrightarrow$ $(X,Y)(\Omega)=X(\Omega)\times Y(\Omega)$ et, pour tout $(i,j)\in(X,Y)(\Omega)$,

$$\mathbb{P}(\{X=i\}\cap\{Y=j\})=\mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=j).$$

Sur l'indépendance :

- S'il existe $(i_0,j_0)\in(X,Y)(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(\{X=i_0\}\cap\{Y=j_0\})\neq\mathbb{P}(X=i_0)\mathbb{P}(Y=j_0)$, alors X et Y ne sont pas indépendantes.

- S'il existe deux suites de réels positifs $(a_i)_{i\in X(\Omega)}$ et $(b_j)_{j\in Y(\Omega)}$ telles que

$$\mathbb{P}(\{X=i\}\cap\{Y=j\})=a_ib_j, \qquad \sum_{i\in X(\Omega)} a_i=1, \qquad \sum_{j\in Y(\Omega)} b_j=1,$$

  alors X et Y sont indépendantes, et la loi de X est donnée par $\mathbb{P}(X=i)=a_i$, $i\in X(\Omega)$ et la loi de Y est donnée par $\mathbb{P}(Y=j)=b_j$, $j\in Y(\Omega)$.
- X et Y indépendantes $\Rightarrow$ $\mathbb{P}(\{X\in\mathcal{D}_1\}\cap\{Y\in\mathcal{D}_2\})=\mathbb{P}(X\in\mathcal{D}_1)\mathbb{P}(Y\in\mathcal{D}_2)$.
- X et Y indépendantes $\Rightarrow$ $g(X)$ et $h(Y)$ indépendantes.

"Indépendantes et identiquement distribuées"/*iid* : On dit que X et Y sont *iid* quand elles sont "indépendantes et identiquement distribuées". La mention "identiquement distribuées" signifie "suivent la même loi".

Loi d'une somme de deux *var* indépendantes (produit de convolution) :

$$\mathbb{P}(X+Y=k)=\sum_{i\in X(\Omega)}\mathbb{P}(Y=k-i)\mathbb{P}(X=i), \qquad k\in(X+Y)(\Omega).$$

Exemples :

$X_i\sim$	$\mathcal{B}(p)$	$\mathcal{B}(m_i,p)$	$\mathcal{P}(\lambda_i)$	$\mathcal{G}(p)$
$X_1+X_2\sim$	$\mathcal{B}(2,p)$	$\mathcal{B}(m_1+m_2,p)$	$\mathcal{P}(\lambda_1+\lambda_2)$	$\mathcal{G}(2,p)$

Formule du transfert :

$$\mathbb{E}(g(X,Y))=\sum\sum_{(i,j)\in(X,Y)(\Omega)} g(i,j)\mathbb{P}(\{X=i\}\cap\{Y=j\}).$$

Linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(aX+bY)=a\mathbb{E}(X)+b\mathbb{E}(Y).$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\mathbb{E}(XY)|\le\sqrt{\mathbb{E}(X^2)}\sqrt{\mathbb{E}(Y^2)}.$$

Moments et indépendance : X et Y indépendantes $\Rightarrow$

$$\mathbb{E}(g(X)h(Y)) = \mathbb{E}(g(X))\mathbb{E}(h(Y)).$$

En particulier, $\mathbb{E}(X^k Y^m) = \mathbb{E}(X^k)\mathbb{E}(Y^m)$.

Fonction génératrice : Si $(X,Y)(\Omega) \subseteq \mathbb{N}^2$,

$$G(s,t) = \mathbb{E}(s^X t^Y) = \sum\sum_{(i,j)\in(X,Y)(\Omega)} s^i t^j \mathbb{P}(\{X=i\}\cap\{Y=j\}), \quad (s,t)\in[-1,1]^2.$$

Propriétés :

$$G(s,1) = G_X(s), \qquad G(1,t) = G_Y(t), \qquad G(s,s) = G_{X+Y}(s), \qquad \mathbb{E}(XY) = \frac{\partial^2 G}{\partial s \partial t}(1,1).$$

Fonction génératrice et loi :

- Si $(X,Y)(\Omega) \subseteq \mathbb{N}^2$ et
$$G(s,t) = \sum_{i\in K}\sum_{j\in L} a_{i,j} s^i t^j,$$
alors $(X,Y)(\Omega) = \{(i,j)\in K\times L;\ a_{i,j}\neq 0\}$ et la loi de (X,Y) est donnée par
$$\mathbb{P}(\{X=i\}\cap\{Y=j\}) = a_{i,j}, \qquad (i,j)\in(X,Y)(\Omega).$$

- Si $(X,Y)(\Omega) \subseteq \mathbb{N}^2$ alors $(X,Y)(\Omega) = \left\{(i,j)\in\mathbb{N}^2;\ \frac{\partial^{i+j}G}{\partial^i s \partial^j t}(0,0)\neq 0\right\}$ et la loi de (X,Y) est donnée par
$$\mathbb{P}(\{X=i\}\cap\{Y=j\}) = \frac{1}{i!j!}\frac{\partial^{i+j}G}{\partial^i s\partial^j t}(0,0), \qquad (i,j)\in(X,Y)(\Omega).$$

Fonction génératrice et indépendance : X et Y indépendantes $\Leftrightarrow$ $G(s,t) = G_X(s)G_Y(t)$ pour tout $(s,t)\in[-1,1]^2$.

Covariance :

$$\mathbb{C}(X,Y) = \mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Matrice de covariance :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \mathbb{V}(X) & \mathbb{C}(X,Y) \\ \mathbb{C}(Y,X) & \mathbb{V}(Y) \end{pmatrix}.$$

Variance d'une somme de *var* :

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\mathbb{C}(X,Y).$$

Propriétés :

- $\mathbb{C}(X,Y) = \mathbb{C}(Y,X)$,
- $\mathbb{C}(X,a) = 0$,
- $\mathbb{C}(aX+b, cY+d) = ac\mathbb{C}(X,Y)$,
- $\mathbb{C}(aX+bY, cU+dV) = ac\mathbb{C}(X,U) + ad\mathbb{C}(X,V) + bc\mathbb{C}(Y,U) + bd\mathbb{C}(Y,V)$,
- $|\mathbb{C}(X,Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y)$.

Paramètres d'un couple de *var* : Les principaux paramètres d'un couple de *var* (vecteur colonne) $U = (X,Y)^t$ sont son espérance : $\mathbb{E}_2(U) = (\mathbb{E}(X), \mathbb{E}(Y))^t$, et sa matrice de covariance Σ.

Covariance, variance et indépendance : X et Y indépendantes $\Rightarrow$

- $\mathbb{C}(X,Y) = 0$,
- $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$.

Si $\mathbb{C}(X,Y) = 0$, on ne peut rien conclure sur l'indépendance des *var* X et Y.

Coefficient de corrélation linéaire :

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathbb{C}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

On a $\rho(X,Y) \in [-1,1]$. Plus $|\rho(X,Y)|$ est proche de 1, plus la dépendance linéaire entre X et Y est forte.

9 Vecteurs de *var* discrètes

Vecteur de *var* : Soient $X_1, \ldots, X_n$ n *var*. On appelle vecteur de *var* l'application $(X_1, \ldots, X_n)$: $\Omega \to \mathbb{R}^n$ vérifiant $(X_1, \ldots, X_n)(\omega) = (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$, $\omega \in \Omega$.

Support d'un vecteur de *var* : Le support d'un vecteur de *var* $(X_1, \ldots, X_n)$ est l'ensemble des valeurs atteintes par $(X_1, \ldots, X_n)$. Il est noté $(X_1, \ldots, X_n)(\Omega)$.

Loi d'un vecteur de *var* : La loi d'un vecteur de *var* $(X_1, \ldots, X_n)$ est la probabilité $\mathbb{P}_{(X_1,\ldots,X_n)}$ définie par $\mathbb{P}_{(X_1,\ldots,X_n)}(A) = \mathbb{P}((X_1, \ldots, X_n) \in A) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega;\ (X_1, \ldots, X_n)(\omega) \in A\})$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Vecteur de *var* discrètes :

- On appelle vecteur de *var* discrètes tout vecteur de *var* $(X_1, \ldots, X_n)$ prenant un ensemble de valeurs fini, ou infini dénombrable. Dès lors, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, X_i est une *var* discrète.
- La loi de $(X_1, \ldots, X_n)$ est donnée par

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i = u_i\}\right), \qquad (u_1, \ldots, u_n) \in (X_1 \ldots X_n)(\Omega).$$

Propriétés : $\displaystyle\sum \ldots \sum_{(u_1,\ldots,u_n)\in(X_1,\ldots,X_n)(\Omega)} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i = u_i\}\right) = 1,$

$$\mathbb{P}\left((X_1, \ldots, X_n) \in \mathcal{D}\right) = \sum \ldots \sum_{(u_1,\ldots,u_n)\in(X_1,\ldots,X_n)(\Omega)\cap\mathcal{D}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i = u_i\}\right).$$

Caractérisation : $q_{u_1,\ldots,u_n}$, $(u_1, \ldots, u_n) \in \mathcal{D}$ caractérise la loi d'un vecteur de *var* discrètes $\Leftrightarrow$ $q_{u_1,\ldots,u_n} \geq 0$ et $\displaystyle\sum \ldots \sum_{(u_1,\ldots,u_n)\in\mathcal{D}} q_{u_1,\ldots,u_n} = 1$.

Loi marginale d'une *var* composante de $(X_1, \ldots, X_n)$: La loi de X_1 est donnée par

$$\mathbb{P}(X_1 = u_1) = \sum \ldots \sum_{(u_2,\ldots,u_n)\in(X_2,\ldots,X_n)(\Omega)} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i = u_i\}\right), \qquad u_1 \in X_1(\Omega).$$

On définit de la même manière les lois marginales des autres *var* $X_2, \ldots, X_n$.

Loi de vecteurs de *var* composantes de $(X_1, \ldots, X_n)$: La loi de (X_1, X_2) est donnée par

$$\mathbb{P}(\{X_1 = u_1\} \cap \{X_2 = u_2\}) = \sum_{(u_3,\ldots,u_n) \in (X_3,\ldots,X_n)(\Omega)} \cdots \sum \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i = u_i\}\right), \qquad (u_1, u_2) \in (X_1, X_2)(\Omega).$$

On définit de la même manière les lois d'autres vecteurs de *var*.

Fonction de répartition :

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \leq x_i\}\right), \qquad (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Fonction génératrice : Si $(X_1, \ldots, X_n)(\Omega) \subseteq \mathbb{N}^n$,

$$G(s_1, \ldots, s_n) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} s_i^{X_i}\right), \qquad (s_1, \ldots, s_n) \in [-1, 1]^n.$$

Indépendance de n *var* discrètes : $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes $\Leftrightarrow$ pour tout $(u_1, \ldots, u_n) \in \prod_{i=1}^{n} X_i(\Omega)$ et tout $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} \{X_i = u_i\}\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(X_i = u_i).$$

Sur l'indépendance :

- Si $(X_1, \ldots, X_n)(\Omega)$ n'est pas un ensemble produit, alors $X_1, \ldots, X_n$ ne sont pas indépendantes.
- $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes $\Rightarrow$ $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \in \mathcal{D}_i\}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \in \mathcal{D}_i)$.
- $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes $\Rightarrow$ $g_1(X_1), \ldots, g_n(X_n)$ indépendantes.
- $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes $\Rightarrow$ $g(X_1, \ldots, X_q)$ et $h(X_{q+1}, \ldots, X_n)$ indépendantes.

Formule du transfert :

$$\mathbb{E}\left(g(X_1, \ldots, X_n)\right) = \sum_{(u_1,\ldots,u_n) \in (X_1,\ldots,X_n)(\Omega)} \cdots \sum g(u_1, \ldots, u_n) \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i = u_i\}\right).$$

Espérance et indépendance : $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes $\Rightarrow$

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} g_i(X_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(g_i(X_i)).$$

Quelques lois usuelles d'une somme de n *var* indépendantes :

$X_i \sim$	$\mathcal{B}(p)$	$\mathcal{B}(m_i, p)$	$\mathcal{P}(\lambda_i)$	$\mathcal{G}(p)$
$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim$	$\mathcal{B}(n, p)$	$\mathcal{B}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i, p\right)$	$\mathcal{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$	$\mathcal{G}(n, p)$

Matrice de covariance :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \mathbb{V}(X_1) & \mathbb{C}(X_1, X_2) & \ldots & \ldots & \mathbb{C}(X_1, X_n) \\ \mathbb{C}(X_2, X_1) & \mathbb{V}(X_2) & \ldots & \ldots & \mathbb{C}(X_2, X_n) \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \mathbb{C}(X_{n-1}, X_n) \\ \mathbb{C}(X_n, X_1) & \ldots & \ldots & \ldots & \mathbb{V}(X_n) \end{pmatrix}.$$

Bilinéarité de la covariance :

$$\mathbb{C}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i, \sum_{j=1}^{q} b_j Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{q} a_i b_j \mathbb{C}(X_i, Y_j).$$

Espérance et variance d'une somme de n *var* :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i), \qquad \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) + 2\sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} \mathbb{C}(X_i, X_j).$$

$X_1, \ldots, X_n$ indépendantes $\Rightarrow$

$$\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i).$$

Paramètres d'un vecteur de *var* : Les principaux paramètres d'un vecteur (colonne) de *var* $X = (X_1, \ldots, X_n)^t$ sont son espérance : $\mathbb{E}_n(X) = (\mathbb{E}(X_1), \ldots, \mathbb{E}(X_n))^t$, et sa matrice de covariance Σ.

10 Convergences de suites de *var* discrètes

Suite de *var* indépendantes : $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de *var* discrètes indépendantes $\Leftrightarrow$ toute sous-famille finie extraite de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille de *var* discrètes indépendantes.

Convergence en probabilité : Une suite de *var* discrètes $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers X $\Leftrightarrow$ pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0.$$

Loi faible des grands nombres : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* discrètes admettant un moment d'ordre 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Alors $(\overline{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $\mathbb{E}(X_1)$.

Convergence en loi : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var* discrètes.

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X $\Leftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$ $\Leftrightarrow$ pour toute fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue bornée, on a $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(g(X_n)) = \mathbb{E}(g(X))$ $\Leftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} G_{X_n}(s) = G_X(s)$, $s \in [-1, 1]$.

Hiérarchie :

- Convergence en probabilité vers X $\Rightarrow$ convergence en loi vers X.
- Convergence en probabilité vers 0 $\Leftrightarrow$ convergence en loi vers 0.

Approximations usuelles :

- Si $p = \dfrac{l}{l+m}$ et $n \leq \dfrac{l+m}{10}$, alors

$$\mathcal{H}(l, m, n) \approx \mathcal{B}(n, p),$$

- Si $n \geq 31$ et $np \leq 10$, alors

$$\mathcal{B}(n, p) \approx \mathcal{P}(np).$$

11 Calcul intégral

Primitive : On appelle primitive de $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ toute fonction F telle que

$$F'(x) = f(x).$$

Propriétés :

- Pour tout $c \in \mathbb{R}$, $F + c$ est une primitive de f.
- Soient F une primitive de f et G une primitive de g. Alors, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$.

Primitives usuelles :

$f(x)$	x^{α}	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\frac{1}{x}$	$e^{\alpha x}$	$\ln(x)$
$F(x)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$2\sqrt{x}$	$\ln(\|x\|)$	$\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}$	$x\ln(x) - x$
$f(x)$	a^x	$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\tan^2(x) + 1$	$\frac{1}{\sin^2(x)}$
$F(x)$	$\frac{a^x}{\ln(a)}$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\tan(x)$	$-\text{cotan}(x)$
$f(x)$	$\tan(x)$	$\text{cotan}(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$F(x)$	$-\ln(\|\cos(x)\|)$	$\ln(\|\sin(x)\|)$	$\arctan(x)$	$\arcsin(x)$	$\arccos(x)$

Primitive d'une fonction composée : Soit $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable dont la dérivée est continue. Alors une primitive de $g(x) = u'(x)f(u(x))$ est

$$G(x) = F(u(x)).$$

Exemples de primitives de fonctions composées :

$f(x)$	$\alpha u'(x)(u(x))^{\alpha-1}$	$\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$u'(x)e^{u(x)}$
$F(x)$	$(u(x))^{\alpha}$	$2\sqrt{u(x)}$	$\ln(\lvert u(x)\rvert)$	$e^{u(x)}$
$f(x)$	$u'(x)\sin(u(x))$	$u'(x)\cos(u(x))$	$\dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}}$	$\dfrac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$
$F(x)$	$-\cos(u(x))$	$\sin(u(x))$	$\arcsin(u(x))$	$\arctan(u(x))$

Calcul intégral et primitive d'une fonction f continue :

- On appelle intégrale de f sur $[a,b]$ le réel

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

- On adopte la notation "crochet" : $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$, donc

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Propriétés :

- $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$
- $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0.$
- Linéarité de l'intégration :

$$\int_a^b (\lambda f(x) + g(x))\, dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

- Relation de Chasles : pour tout $c \in]a,b[$, on a

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Techniques de calcul intégral : Soient $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $v : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables dont les dérivées sont continues.

- Intégration par parties :

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx.$$

- Changement de variable :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(y))u'(y)dy.$$

On dit alors que l'on a fait le changement de variable : $x = u(y)$ (ou $y = u^{-1}(x)$). Ainsi, on remplace x par $u(y)$, donc $dx = d(u(y)) = u'(y)dy$ et on ajuste les bornes d'intégration : $x = a \; \Leftrightarrow \; y = u^{-1}(a)$ et $x = b \; \Leftrightarrow \; y = u^{-1}(b)$.

Propriétés : Soit f une fonction positive. Alors

- pour tous $a \leq b$, on a $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
- pour tout $[c, d] \subseteq [a, b]$, on a $\int_c^d f(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$.

Intégrale nulle : Si f est continue et de signe constant sur $[a, b]$, alors
$\int_a^b f(x)dx = 0$ si, et seulement si, $f(x) = 0$, pour tout $x \in [a, b]$.

Majoration de l'intégrale :

- pour tous $a \leq b$, on a $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq (b-a) \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b (f(x))^2 dx} \sqrt{\int_a^b (g(x))^2 dx}.$$

Intégrale sur un intervalle centré en 0 :

- Si f est paire sur $[-a, a]$, *i.e.* $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in [-a, a]$, alors on a

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$$

- Si f est impaire $[-a, a]$, *i.e.* $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in [-a, a]$, alors (si existence) on a

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0.$$

Intégrale généralisée en $-\infty$ ou/et ∞ :

- $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{\ell\to\infty}\int_a^{\ell} f(x)dx$,
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{\ell\to-\infty}\int_{\ell}^{b} f(x)dx$,
- pour tout $c\in\mathbb{R}$, on a $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx$.

Intégrales de Riemann :

- L'intégrale $I(\alpha) = \displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx$ existe si, et seulement si, $\alpha > 1$.
- L'intégrale $J(\beta) = \displaystyle\int_0^{1}\frac{1}{x^{\beta}}dx$ existe si, et seulement si, $\beta < 1$.

Extension :

Les principaux résultats présentés dans ce chapitre s'étendent aux fonctions continues par morceaux avec des primitives par morceaux, *i.e.* F est dérivable sur $[a,b]$ sauf, éventuellement, en un nombre fini de points et on a $F'(x) = f(x)$ sauf, éventuellement, en un nombre fini de points.

Quelques règles de calculs pour les intégrales doubles :

- Les intégrales doubles vérifient les mêmes propriétés que les intégrales simples (linéarité, relation de Chasles...),
- La plupart du temps, le calcul des intégrales doubles consiste à exprimer ces intégrales en une série d'intégrales simples calculables.
- Lorsque toutes les fonctions mises en jeu sont intégrables, si le domaine d'intégration est défini en adéquation, l'ordre des intégrations n'a pas d'importance.
  En outre : $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx\right)dy = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy\right)dx$.
  En intégrant sur $\mathcal{D} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 0\le x\le y\le 1\}$, on a

$$\int_0^1\left(\int_0^y f(x,y)dx\right)dy = \int_0^1\left(\int_x^1 f(x,y)dy\right)dx.$$

- *Changement de variable en coordonnées polaires :* en faisant le changement de variable : $(x,y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$, avec $(r,\theta)\in]0,\infty[\times[0,2\pi]$, on a

$$\int\int_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy = \int\int_{\mathcal{D}^*} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))rdrd\theta,$$

  où $\mathcal{D}$ désigne un domaine défini en fonction de (x,y) et $\mathcal{D}^*$ son analogue avec (r,θ).

12 Variables aléatoires réelles à densité

Densité : On appelle densité toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$,
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

***Var* à densité :** On dit qu'une *var* X est à densité s'il existe une densité f telle que, pour tous $a \leq b$, on a

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx.$$

On dit alors que X est de densité f ou X possède la densité f ou f est une densité de X. La loi de X est caractérisée par f.

Non-unicité de la densité d'une *var* : Si X possède la densité f, alors elle possède d'autres densités. En effet, si g est est une fonction égale à f sauf en quelques points alors g est aussi une densité de X.

Calculs usuels :

$\mathbb{P}(X = a)$	$\mathbb{P}(X \leq b)$	$\mathbb{P}(X \geq a)$	$\mathbb{P}(a \leq X \leq b)$
0	$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$	$\int_{a}^{\infty} f(x)dx$	$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$

Ainsi, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $\mathbb{P}(X = a) = 0$ (en cela, le comportement d'une *var* à densité diffère radicalement de celui d'une *var* discrète). On peut donc remplacer les inégalités larges par des inégalités strictes : $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{P}(a \leq X < b) = \mathbb{P}(a < X < b) \ldots$

Fonction de répartition :

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

La fonction de répartition caractérise la loi de X ; pour tous $a \leq b$, on a

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a).$$

Support : Soit F la fonction de répartition d'une *var* X de densité f. Alors $X(\Omega)$ est l'adhérence de $\{x \in \mathbb{R};\ F(x) \in]0,1[\}$.

Si $\{x \in \mathbb{R};\ f(x) \neq 0\}$ est un intervalle ou $\mathbb{R}$ *(ce qui est souvent le cas)*, alors $X(\Omega)$ est aussi l'adhérence de $\{x \in \mathbb{R};\ f(x) \neq 0\}$.

Exemples :

Loi	uniforme	exponentielle	gamma	normale
paramètres	$(a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \ a < b$	$\lambda > 0$	$m > 0,\ \lambda > 0$	$\mu \in \mathbb{R},\ \ \sigma > 0$
$X \sim$	$\mathcal{U}([a,b])$	$\mathcal{E}(\lambda)$	$\Gamma(m,\lambda)$	$\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$
$X(\Omega)$	$[a,b]$	$[0,\infty[$	$[0,\infty[$	$\mathbb{R}$
$f(x)$	$\frac{1}{b-a}$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$\frac{\lambda^m}{\Gamma(m)} x^{m-1} e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

Propriétés :

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) \in [0,1]$,
- F est continue sur $\mathbb{R}$,
- F est croissante,
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$.

Densité et fonction de répartition : Soit X une *var* à densité de fonction de répartition F. Alors une densité f de X est donnée par

$$f(x) = F'(x)$$

pour tout $x \in X(\Omega)$ sauf les points où F n'est pas dérivable, et par ce qu'on veut ailleurs (du moment que f reste une densité).

Égalité en loi : X et Y suivent la même loi $\Leftrightarrow$ $F_X(x) = F_Y(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $f_X(x) = f_Y(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ sauf, éventuellement, en un nombre fini de points.

***Var* symétrique :** X est symétrique $\Leftrightarrow$ X et $-X$ suivent la même loi.

X possède une densité f paire $\Rightarrow$ X est symétrique.

Exemple : une var X suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, i.e. de densité : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$, est symétrique car f est paire.

Propriétés : X symétrique $\Rightarrow$ $\mathbb{P}(X \leq -x) = 1 - \mathbb{P}(X \leq x)$, $x \in \mathbb{R}$,

$\mathbb{P}(|X| \leq x) = 2\mathbb{P}(X \leq x) - 1$, $x \geq 0$.

Espérance :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Formule du transfert :

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx.$$

Propriétés :

- $\mathbb{E}(a) = a$,
- $X(\Omega) \subseteq [0, \infty[$ $\Rightarrow$ $\mathbb{E}(X) \geq 0$,
- $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$,
- $\mathbb{E}(aX^2 + bX + c) = a\mathbb{E}(X^2) + b\mathbb{E}(X) + c$.

Moment d'ordre p :

$$m_p = \mathbb{E}(X^p) = \int_{-\infty}^{\infty} x^p f(x) dx.$$

Méthode de la fonction muette : Si, pour toute fonction continue bornée $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a $\mathbb{E}(g(X)) = \mathbb{E}(g(Y))$, alors X et Y suivent la même loi.

Espérance et *var* symétrique : X est symétrique $\Rightarrow$ pour toute fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ impaire (si existence) $\mathbb{E}(g(X)) = 0$.

Variance :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2).$$

Propriétés :

- $\mathbb{V}(X) \geq 0$,
- $\mathbb{V}(X) = 0 \;\Leftrightarrow\; X$ est une *var* constante,
- $\mathbb{V}(aX+b) = a^2\mathbb{V}(X)$.

Formule de König-Huyghens :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2.$$

Écart-type :

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}.$$

Exemples :

$X \sim$	$\mathcal{U}([a,b])$	$\mathcal{E}(\lambda)$	$\Gamma(m,\lambda)$	$\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$
$\mathbb{E}(X)$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{m}{\lambda}$	μ
$\mathbb{V}(X)$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$	$\dfrac{m}{\lambda^2}$	σ^2
$\sigma(X)$	$\dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{\sqrt{m}}{\lambda}$	σ

Inégalité de Markov : Soit $h : \mathbb{R} \to]0,\infty[$ une fonction croissante. Pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$\mathbb{P}(|X| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(h(|X|))}{h(\epsilon)}.$$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev : Pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\epsilon^2}.$$

Transformée de Laplace :

$$L(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Transformée de Laplace et ses dérivées :

$$L'(t) = \mathbb{E}(Xe^{tX}), \qquad L''(t) = \mathbb{E}(X^2 e^{tX}), \qquad L^{(k)}(t) = \mathbb{E}(X^k e^{tX}).$$

Propriétés :

$$\mathbb{E}(X) = L'(0), \qquad \mathbb{V}(X) = L''(0) - (L'(0))^2.$$

Transformée de Laplace et égalité en loi : X et Y suivent la même loi $\Leftrightarrow$ $L_X(t) = L_Y(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Fonction caractéristique :

$$\varphi(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)dx, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Exemples :

$X \sim$	$\mathcal{U}([a,b])$	$\mathcal{E}(\lambda)$	$\Gamma(m,\lambda)$	$\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$
$\varphi(t)$	$\dfrac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$	$\dfrac{\lambda}{\lambda - it}$	$\dfrac{\lambda^m}{(\lambda - it)^m}$	$e^{it\mu - \sigma^2 \frac{t^2}{2}}$

Fonction caractéristique et densité :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-itx} dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Fonction caractéristique et ses dérivées :

$$\varphi'(t) = i\mathbb{E}(Xe^{itX}), \qquad \varphi''(t) = -\mathbb{E}(X^2 e^{itX}), \qquad \varphi^{(k)}(t) = i^k \mathbb{E}(X^k e^{itX}).$$

Fonction caractéristique et égalité en loi : X et Y suivent la même loi $\Leftrightarrow$ $\varphi_X(t) = \varphi_Y(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

13 Lois à densité usuelles

Loi uniforme (continue) : X suit la loi uniforme $\mathcal{U}([a,b])$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b \;\Leftrightarrow\; X(\Omega) = [a,b]$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}, \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Loi triangulaire (continue) : X suit la loi triangulaire $\mathcal{T}_{riang}(a)$, $a > 0 \;\Leftrightarrow\; X(\Omega) = [-a,a]$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a^2}(a - |x|) & \text{si } x \in [-a,a], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = 0, \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{a^2}{6}.$$

Loi parabolique : X suit la loi parabolique $\mathcal{P}_{arabol}(a)$, $a > 0 \;\Leftrightarrow\; X(\Omega) = [-a,a]$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{4a^3}(a^2 - x^2) & \text{si } x \in [-a,a], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = 0, \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{a^2}{5}.$$

Loi bêta : X suit la loi bêta $B(r,s)$, $(r,s) \in]0,\infty[^2 \;\Leftrightarrow\; X(\Omega) = [0,1]$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta(r,s)} x^{r-1}(1-x)^{s-1} & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\beta(r,s) = \int_0^1 t^{r-1}(1-t)^{s-1}dt$.

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{r}{r+s}, \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{rs}{(r+s)^2(r+s+1)}.$$

Loi exponentielle : X suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0 \;\Leftrightarrow$

$X(\Omega) = [0,\infty[$,

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}, \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Loi gamma : X suit la loi gamma $\Gamma(m,\lambda)$, $(m,\lambda) \in]0,\infty[^2 \;\Leftrightarrow\; X(\Omega) = [0,\infty[$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^m}{\Gamma(m)} x^{m-1}e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\Gamma(m) = \int_0^\infty t^{m-1}e^{-t}dt$ (on a $\Gamma(m) = (m-1)!$ si $m \in \mathbb{N}^*$).

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{m}{\lambda}, \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{m}{\lambda^2}.$$

Loi de Laplace : X suit la loi de Laplace $\mathcal{L}(a)$, $a > 0 \;\Leftrightarrow\; X(\Omega) = \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{2a}e^{-\frac{|x|}{a}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = 0, \qquad \mathbb{V}(X) = 2a^2.$$

Loi de Cauchy : X suit la loi de Cauchy $\mathcal{C}(\mu, \lambda)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0 \;\Leftrightarrow\; X(\Omega) = \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\lambda}{\pi\left(\lambda^2 + (x-\mu)^2\right)}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Espérance et variance : elles n'existent pas.

Loi de Pareto : X suit la loi de Pareto $\mathcal{P}_{ar}(a, \gamma, x_0)$, $(a, \gamma) \in]0, \infty[^2$, $x_0 \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; X(\Omega) = [a + x_0, \infty[$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\gamma}{a}\left(\dfrac{a}{x - x_0}\right)^{\gamma+1} & \text{si } x > a + x_0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\gamma a}{\gamma - 1} + x_0 \text{ si } \gamma > 1, \quad \mathbb{V}(X) = \frac{\gamma a^2}{(\gamma-1)^2(\gamma-2)} \text{ si } \gamma > 2.$$

Loi normale : X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0 \;\Leftrightarrow\; X(\Omega) = \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = \mu, \qquad \mathbb{V}(X) = \sigma^2.$$

Lorsque $\mu = 0$ et $\sigma = 1$, on dit que X suit la loi normale "centrée réduite".

Loi du Chi-deux : X suit la loi du Chi-deux $\chi^2(\nu)$, $\nu > 0 \;\Leftrightarrow\; X(\Omega) = [0, \infty[$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) = \int_0^\infty t^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-t} dt$.

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = \nu, \qquad \mathbb{V}(X) = 2\nu.$$

Loi de Student : X suit la loi de Student $\mathcal{T}(\nu)$, $\nu > 0 \;\Leftrightarrow\; X(\Omega) = \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\nu\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

où, pour tout $\alpha \in \left\{\frac{\nu}{2}, \frac{\nu+1}{2}\right\}$, on a $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$.

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = 0, \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{\nu}{\nu-2} \text{ si } \nu > 2.$$

Loi de Fisher : X suit la loi de Fisher $\mathcal{F}(\nu_1, \nu_2)$, $(\nu_1, \nu_2) \in]0, \infty[^2$:

$X(\Omega) = [0, \infty[$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta\left(\frac{\nu_1}{2}, \frac{\nu_2}{2}\right) x} \left(\dfrac{\nu_1 x}{\nu_1 x + \nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}} \left(1 - \dfrac{\nu_1 x}{\nu_1 x + \nu_2}\right)^{\frac{\nu_2}{2}} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\beta(\frac{\nu_1}{2}, \frac{\nu_2}{2}) = \int_0^1 t^{\frac{\nu_1}{2}-1}(1-t)^{\frac{\nu_2}{2}-1} dt$.

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\nu_2}{\nu_2 - 2} \text{ si } \nu_2 > 2, \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{2\nu_2^2(\nu_1 + \nu_2 - 2)}{\nu_1(\nu_2-2)^2(\nu_2-4)} \text{ si } \nu_2 > 4.$$

14 Retour sur la loi normale

Loi normale : *Rappel :* La *var* X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, si elle possède la densité :

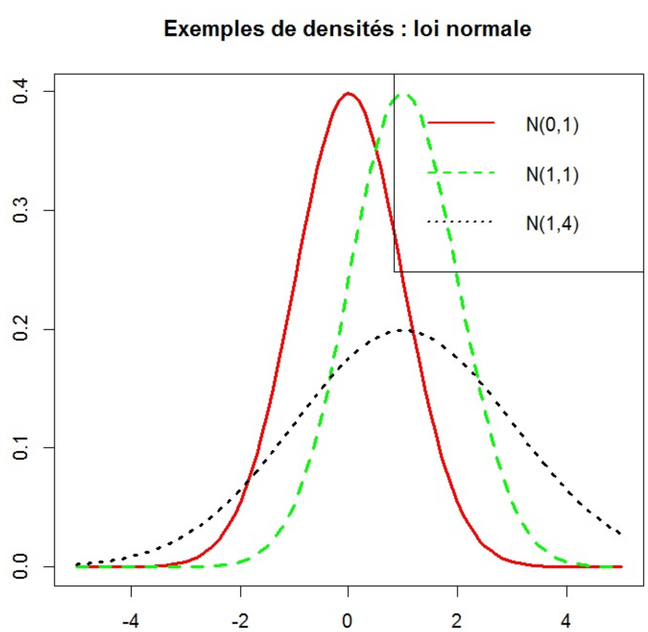
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

La loi normale est particulièrement intéressante car

- elle modélise correctement de nombreuses mesures physiques pouvant prendre une infinité de valeurs (avec les décimales) : poids, tailles, durées, vitesses...
- elle est une loi limite universelle. Cela découle du théorème central limite présenté plus loin.

Graphe : Le graphe de f est symétrique par rapport à μ. Celui-ci est en forme de "cloche" plus ou moins arrondie selon les valeurs de σ. Ce graphe a

- un point maximum de coordonnées : $(x_*, y_*) = (\mu, f(\mu)) = \left(\mu, \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)$,
- deux points d'inflexion de coordonnées
  $(x_0, y_0) = (\mu - \sigma, f(\mu - \sigma)) = \left(\mu - \sigma, \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}}\right)$ et
  $(x_1, y_1) = (\mu + \sigma, f(\mu + \sigma)) = \left(\mu + \sigma, \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}}\right)$.



Espérance, variance et écart-type : $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \;\Rightarrow$

$$\mathbb{E}(X) = \mu, \qquad \mathbb{V}(X) = \sigma^2, \qquad \sigma(X) = \sigma.$$

Ainsi, μ est la valeur moyenne de X et σ mesure la dispersion des valeurs de X autour de μ.

Loi normale centrée réduite : La *var* X suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$ si elle possède la densité :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

On a $\mathbb{E}(X) = 0$, d'où le "centrée", et $\mathbb{V}(X) = 1$, d'où le "réduite".

Comme une densité de X est paire, X est symétrique. Cela implique :

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathbb{P}(-X \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x)$,
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathbb{P}(X \leq -x) = 1 - \mathbb{P}(X \leq x)$,
- pour tout $x \geq 0$, on a $\mathbb{P}(|X| \leq x) = 2\mathbb{P}(X \leq x) - 1$,
- pour toute fonction impaire g (si existence) on a $\mathbb{E}(g(X)) = 0$.

Propriétés : $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \;\Rightarrow$

- $X + b \sim \mathcal{N}(\mu + b, \sigma^2)$, $aX \sim \mathcal{N}(a\mu, a^2\sigma^2)$ et $aX + b \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$,
- on a
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1).$$
Ainsi, la transformation opérée par Z a centrée et réduite la *var* X. Cette transformation est souvent utilisée en pratique.

Règle des 4σ : $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \;\Rightarrow$

$$\mathbb{P}(\mu - 4\sigma \leq X \leq \mu + 4\sigma) \simeq 1.$$

Ainsi, la plupart des réalisations d'une *var* $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ sont contenues dans l'intervalle $[\mu - 4\sigma, \mu + 4\sigma]$.

Moments : $X \sim \mathcal{N}(0,1) \Rightarrow$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{E}(X^{2k}) = \prod_{i=1}^{k}(2i-1), \qquad \mathbb{E}(X^{2k+1}) = 0.$$

Table de valeurs et loi normale centrée réduite : $X \sim \mathcal{N}(0,1) \Rightarrow$ la fonction de la répartition de X est

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

On a $F(x) = F(y) \Leftrightarrow x = y$, et $f(x) = F'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

La fonction F ne peut pas s'écrire sous une forme analytique, sans intégrale. C'est pourquoi on utilise une table de valeurs associée donnant $F(x)$ avec $x \in [0; 3,99]$ et $x = x_1 + x_2$ (voir la table $\mathcal{N}(0,1)$ page 72).

Approximation : loi binomiale et loi normale : Si $n \geq 31$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$, alors on a $\mathcal{B}(n,p) \approx \mathcal{N}(np, np(1-p))$.

En outre, avec $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ et $Y \sim \mathcal{N}(np, np(1-p))$ et une correction de continuité,

- pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}(X \leq k) \simeq \mathbb{P}(Y \leq k + 0,5)$, $\mathbb{P}(X \geq k) \simeq \mathbb{P}(Y \geq k - 0,5)$ et

$$\mathbb{P}(X = k) \simeq \mathbb{P}(k - 0,5 \leq Y \leq k + 0,5),$$

- pour tout $(k_1, k_2) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k_1 < k_2$, on a

$$\mathbb{P}(k_1 \leq X \leq k_2) \simeq \mathbb{P}(k_1 - 0,5 \leq Y \leq k_2 + 0,5).$$

Approximation : loi de Poisson et la loi normale : Si $\lambda \geq 15$, alors on a $\mathcal{P}(\lambda) \approx \mathcal{N}(\lambda, \lambda)$.

15 Couples de *var* à densité

Densité (bidimensionnelle) : On appelle densité (bidimensionnelle) toute fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant :

- pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) \geq 0$,
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1.$

Couple de *var* à densité : On dit qu'un couple de *var* (X, Y) est à densité s'il existe une densité f telle que, pour tout $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$, on a

$$\mathbb{P}((X, Y) \in \mathcal{D}) = \int\int_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy,$$

(x est associé à X et y est associé à Y).

On dit alors que (X, Y) est de densité f ou (X, Y) possède la densité f ou f est une densité de (X, Y). La loi de (X, Y) est caractérisée par f.

Propriétés : Pour tous $a \leq b$, $c \leq d$ et toutes fonctions

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $g(x) \leq h(x)$, $x \in \mathbb{R}$, on a

- $\mathbb{P}(\{a \leq X \leq b\} \cap \{c \leq Y \leq d\}) = \displaystyle\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy,$
- $\mathbb{P}(\{a \leq X \leq b\} \cap \{g(X) \leq Y \leq h(X)\}) = \displaystyle\int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx,$
- $\mathbb{P}(g(X) \leq Y \leq h(X)) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx.$

Fonction de répartition :

$$F(x, y) = \mathbb{P}(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\}), \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

On a $F_X(x) = \lim_{y \to \infty} F(x, y)$, $x \in \mathbb{R}$, et $F_Y(y) = \lim_{x \to \infty} F(x, y)$, $y \in \mathbb{R}$.

Support : Soit F la fonction de répartition d'un couple de *var* (X, Y) de densité f. Alors $(X, Y)(\Omega)$ est l'adhérence de $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ F(x, y) \in]0, 1[\}$.

Si $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ f(x,y) \neq 0\}$ est un ensemble d'aire non nulle "sans points ou courbes isolés" *(ce qui est souvent le cas)*, alors $(X,Y)(\Omega)$ est aussi l'adhérence de $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ f(x,y) \neq 0\}$. De plus, $X(\Omega)$ est l'adhérence de l'ensemble des x vérifiant $f(x,y) \neq 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$, et $Y(\Omega)$ est l'adhérence de l'ensemble des y vérifiant $f(x,y) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Densité et fonction de répartition : Soit (X,Y) un couple de *var* à densité de fonction de répartition F. Alors une densité f de (X,Y) est donnée par

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y)$$

pour tout $(x,y) \in (X,Y)(\Omega)$ sauf les points of F n'est pas différentiable, et par ce qu'on veut ailleurs (du moment que f reste une densité).

Densités marginales :

- Une densité de X est
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy, \qquad x \in \mathbb{R}.$$
- Une densité de Y est
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx, \qquad y \in \mathbb{R}.$$
- Si $f(x,y) = f(y,x)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ sauf, éventuellement, sur un ensemble d'aire nulle, alors X et Y suivent la même loi ; une densité de Y est $f_Y(y) = f_X(y)$, $y \in \mathbb{R}$.

Indépendance de 2 *var* à densité : X et Y indépendantes $\Leftrightarrow$ (X,Y) possède la densité produit : $f_X(x)f_Y(y)$, *i.e.* $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ sauf, éventuellement, sur un ensemble d'aire nulle (impliquant $(X,Y)(\Omega) = X(\Omega) \times Y(\Omega)$) $\Leftrightarrow$ $F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $\Leftrightarrow$ pour tous $a \leq b$, $c \leq d$,

$$\mathbb{P}\left(\{a \leq X \leq b\} \cap \{c \leq Y \leq d\}\right) = \mathbb{P}(a \leq X \leq b)\mathbb{P}(c \leq Y \leq d).$$

Sur l'indépendance :

- Si $(X,Y)(\Omega)$ n'est pas un ensemble produit, i.e. on ne peut pas écrire $(X,Y)(\Omega) = I \times J$ avec $(I,J) \subseteq \mathbb{R}^2$, alors X et Y ne sont pas indépendantes.

- S'il existe deux fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$f(x,y) = g(x)h(y), \qquad \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = 1, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} h(y)dy = 1,$$

  alors X et Y sont indépendantes, une densité de X est g et une densité de Y est h.
- X et Y indépendantes $\Rightarrow$ $\mathbb{P}(\{X \in \mathcal{D}_1\} \cap \{Y \in \mathcal{D}_2\}) = \mathbb{P}(X \in \mathcal{D}_1)\mathbb{P}(Y \in \mathcal{D}_2)$.
- X et Y indépendantes $\Rightarrow$ $g(X)$ et $h(Y)$ indépendantes.

"Indépendantes et identiquement distribuées"/*iid* : On dit que X et Y sont *iid* quand elles sont "indépendantes et identiquement distribuées". La mention "identiquement distribuées" signifie "suivent la même loi".

Loi d'un couple de *var* $(\phi(X,Y), \psi(X,Y))$:

(théorème du changement de variable) Soient (X,Y) un couple de *var* de densité $f_{(X,Y)}$, et $\phi : (X,Y)(\Omega) \to \mathbb{R}$ et $\psi : (X,Y)(\Omega) \to \mathbb{R}$ deux fonctions. On considère le couple de *var* :

$$(U,V) = (\phi(X,Y), \psi(X,Y)).$$

On suppose que $g(x,y) = (\phi(x,y), \psi(x,y))$ est injective et qu'il existe deux fonctions $h : \mathbb{R}^2 \to X(\Omega)$ et $k : \mathbb{R}^2 \to Y(\Omega)$ différentiables telles que

$$\begin{cases} u = \phi(x,y), \\ v = \psi(x,y), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = h(u,v), \\ y = k(u,v). \end{cases}$$

Soit $J(u,v)$ le jacobien associé à $(x,y) = (h(u,v), k(u,v))$ défini par le déterminant :

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial h}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial h}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial k}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial k}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix} = \frac{\partial h}{\partial u}(u,v)\frac{\partial k}{\partial v}(u,v) - \frac{\partial k}{\partial u}(u,v)\frac{\partial h}{\partial v}(u,v).$$

Alors une densité de (U,V) est donnée par

$$f_{(U,V)}(u,v) = f_{(X,Y)}(h(u,v), k(u,v))|J(u,v)|, \qquad (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

Densité d'une somme de deux *var* indépendantes : *(produit de convolution)*

$$f_{X+Y}(x) = (f_X * f_Y)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) f_Y(x-u) du, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

On a aussi $f_{X+Y}(x) = (f_Y * f_X)(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Exemples :

$X_i \sim$	$\mathcal{E}(\lambda)$	$\Gamma(m_i, \lambda)$	$\mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$	$\chi^2(\nu_i)$
$X_1 + X_2 \sim$	$\Gamma(2, \lambda)$	$\Gamma(m_1 + m_2, \lambda)$	$\mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$	$\chi^2(\nu_1 + \nu_2)$

En particulier, toute *var* définie comme une combinaison linéaire de 2 *var* indépendantes suivant chacune une loi normale suit une loi normale.

Densité du produit de deux *var* indépendantes :

$$f_{XY}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) f_Y\left(\frac{x}{u}\right) \frac{1}{|u|} du, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Densité du quotient de deux *var* indépendantes :

$$f_{\frac{X}{Y}}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(ux) f_Y(u) |u| du, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Caractérisations de quelques lois connues :

- Loi du Chi-deux : X et Y *iid* avec $X \sim \mathcal{N}(0,1) \;\Rightarrow$

$$X^2 + Y^2 \sim \chi^2(2).$$

- Loi de Student : X et Y indépendantes avec $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $Y \sim \chi^2(\nu) \;\Rightarrow$

$$\frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{\nu}}} = \sqrt{\nu}\frac{X}{\sqrt{Y}} \sim \mathcal{T}(\nu).$$

∘ Loi de Fisher : X et Y indépendantes avec $X \sim \chi^2(\nu_1)$ et $Y \sim \chi^2(\nu_2)$ $\Rightarrow$

$$\frac{\frac{X}{\nu_1}}{\frac{Y}{\nu_2}} = \frac{\nu_2 X}{\nu_1 Y} \sim \mathcal{F}(\nu_1, \nu_2).$$

Formule du transfert :

$$\mathbb{E}(g(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f(x,y) dx dy.$$

Méthode de la fonction muette : Si, pour toute fonction continue bornée $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, on a $\mathbb{E}(g(X,Y)) = \mathbb{E}(g(U,V))$, alors (X,Y) et (U,V) suivent la même loi.

Linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y).$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\mathbb{E}(XY)| \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)}\sqrt{\mathbb{E}(Y^2)}.$$

Moments et indépendance : X et Y indépendantes $\Rightarrow$

$$\mathbb{E}(g(X)h(Y)) = \mathbb{E}(g(X))\mathbb{E}(h(Y)).$$

En particulier, on a $\mathbb{E}(X^k Y^m) = \mathbb{E}(X^k)\mathbb{E}(Y^m)$.

Covariance :

$$\mathbb{C}(X,Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Matrice de covariance :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \mathbb{V}(X) & \mathbb{C}(X,Y) \\ \mathbb{C}(Y,X) & \mathbb{V}(Y) \end{pmatrix}.$$

Variance d'une somme de *var* :

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\mathbb{C}(X,Y).$$

Propriétés :

- $\mathbb{C}(X, Y) = \mathbb{C}(Y, X)$,
- $\mathbb{C}(X, a) = 0$,
- $\mathbb{C}(aX + b, cY + d) = ac\mathbb{C}(X, Y)$,
- $\mathbb{C}(aX + bY, cU + dV) = ac\mathbb{C}(X, U) + ad\mathbb{C}(X, V) + bc\mathbb{C}(Y, U) + bd\mathbb{C}(Y, V)$,
- $|\mathbb{C}(X, Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y)$.

Covariance, variance et indépendance : X et Y indépendantes $\Rightarrow$

- $\mathbb{C}(X, Y) = 0$,
- $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$.

$\mathbb{C}(X, Y) = 0 \;\; \not\Rightarrow$ on ne peut rien dire sur l'indépendance de X et Y.

Coefficient de corrélation linéaire :

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathbb{C}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

On a $\rho(X, Y) \in] - 1, 1[$. Plus $|\rho(X, Y)|$ est proche de 1, plus la liaison linéaire entre X et Y est forte.

Paramètres d'un couple de *var* : Les principaux paramètres d'un couple de *var* (vecteur colonne) $Z = (X, Y)^t$ sont son espérance : $\mathbb{E}_2(Z) = (\mathbb{E}(X), \mathbb{E}(Y))^t$, et sa matrice de covariance Σ.

Propriété : Soient Z un couple de *var* (vecteur colonne) d'espérance μ et de matrice de covariance Σ, A une matrice à 2 lignes et 2 colonne, c un vecteur colonne à 2 composantes et $W = AZ + c$. Alors

- l'espérance de W est $\mu_* = A\mu + c$,
- la matrice de covariance de W est $\Sigma_* = A\Sigma A^t$.

Couple gaussien :

- Soient X et Y deux *var*. Alors $(X, Y)^t$ est un couple gaussien $\Leftrightarrow$ pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, la *var* $aX + BY$ suit une loi normale.
- Un couple gaussien $(X, Y)^t$ est caractérisé par son espérance μ et sa matrice de covariance Σ. La loi de $(X, Y)^t$ est notée $\mathcal{N}_2(\mu, \Sigma)$.

Loi marginales : Si $(X, Y)^t$ est un couple gaussien, alors X et Y suivent des lois normales.

Proprété d'indépendance : Si $(X,Y)^t$ est un couple gaussien alors X et Y indépendantes $\Leftrightarrow$ $\mathbb{C}(X,Y)=0$.

Densité et fonction caractéristique d'un couple gaussien : Soit $(X,Y)^t \sim \mathcal{N}_2(\mu,\Sigma)$ avec $\mu=(\mu_1,\mu_2)^t$.

- Si $\det(\Sigma)>0$, alors $(X,Y)^t$ possède la densité :

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{\det(\Sigma)}}e^{-\frac{1}{2}(x-\mu_1,y-\mu_2)\Sigma^{-1}(x-\mu_1,y-\mu_2)^t}, \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

- La fonction caractéristique de $(X,Y)^t$ est

$$\varphi(s,t)=e^{i(\mu_1,\mu_2)(s,t)^t-\frac{1}{2}(s,t)\Sigma(s,t)^t}, \qquad (s,t)\in\mathbb{R}^2.$$

Cas particulier : Soit $(X,Y)^t \sim \mathcal{N}_2(\mu,\Sigma)$ avec $\mu=(0,0)^t=0_2$ et $\Sigma=\begin{pmatrix}1 & \rho\\ \rho & 1\end{pmatrix}$, $\rho\in]-1,1[$. Alors

- $(X,Y)^t$ possède la densité :

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2+y^2-2\rho xy)}, \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2,$$

- la fonction caractéristique de $(X,Y)^t$ est

$$\varphi(s,t)=e^{-\frac{1}{2}(s^2+t^2+2\rho st)}, \qquad (s,t)\in\mathbb{R}^2.$$

Résultat en loi : Soient $Z=(X,Y)^t\sim\mathcal{N}_2(\mu,\Sigma)$ et $W=(U,V)^t$ avec

$$\begin{cases} U=a_1X+b_1Y+c_1,\\ V=a_2X+b_2Y+c_2.\end{cases}$$

En posant $A=\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix}$ et $c=(c_1,c_2)^t$, on peut écrire $W=AZ+c$ et

$$W\sim\mathcal{N}_2(A\mu+c, A\Sigma A^t).$$

16 Vecteurs de *var* à densité

Densité (n-dimensionnelle) : On appelle densité (n-dimensionnelle) toute fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vérifiant :

- pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $f(x_1, \ldots, x_n) \geq 0$,
- $\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n = 1.$

Vecteur de *var* à densité : On dit qu'un vecteur de *var* $(X_1, \ldots, X_n)$ est à densité s'il existe une densité f, telle que, pour tout $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, on a

$$\mathbb{P}\left((X_1, \ldots, X_n) \in \mathcal{D}\right) = \int \ldots \int_{\mathcal{D}} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n.$$

On dit alors que $(X_1, \ldots, X_n)$ est de densité f ou $(X_1, \ldots, X_n)$ possède la densité f ou f est une densité de $(X_1, \ldots, X_n)$. La loi de $(X_1, \ldots, X_n)$ est caractérisée par f.

Fonction de répartition :

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \leq x_i\}\right), \qquad (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Retour sur le support : Soit F la fonction de répartition d'un vecteur de *var* $(X_1, \ldots, X_n)$ à densité. On définit $(X_1, \ldots, X_n)(\Omega)$ par l'adhérence de $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ F(x_1, \ldots, x_n) \in]0, 1[\}$.

Densités marginales : Une densité de X_1 est donnée par

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_n) dx_2 \ldots dx_n, \qquad x_1 \in \mathbb{R}.$$

On définit de la même manière des densités pour d'autres *var* $X_2, \ldots, X_n$.

Densité d'un vecteur de *var* composantes de $(X_1, \ldots, X_n)$: Une densité de (X_1, X_2) est donnée par

$$f_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_n) dx_3 \ldots dx_n, \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

On définit de la même manière des densités d'autres vecteurs de *var*.

Indépendance de n *var* à densité : $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes $\Leftrightarrow$ $(X_1, \ldots, X_n)$ possède la densité produit : $\prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)$, *i.e.*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)$$

pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ sauf, éventuellement, sur un ensemble de volume nul (impliquant $(X_1, \ldots, X_n)(\Omega) = X_1(\Omega) \times \ldots \times X_n(\Omega)$) $\Leftrightarrow$ $F(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i)$ pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ $\Leftrightarrow$ pour tous $a_i \leq b_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{a_i \leq X_i \leq b_i\}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(a_i \leq X_i \leq b_i).$$

Sur l'indépendance :

- Si $(X_1, \ldots, X_n)(\Omega)$ n'est pas un ensemble produit, alors $X_1, \ldots, X_n$ ne sont pas indépendantes.
- $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes $\Rightarrow$ $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \in \mathcal{D}_i\}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \in \mathcal{D}_i)$.
- $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes $\Rightarrow$ $g_1(X_1), \ldots, g_n(X_n)$ indépendantes.
- $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes $\Rightarrow$ $g(X_1, \ldots, X_q)$ et $h(X_{q+1}, \ldots, X_n)$ indépendantes.

Formule du transfert :

$$\mathbb{E}\left(g(X_1, \ldots, X_n)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, \ldots, x_n) f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n.$$

Espérance et indépendance : $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes $\Rightarrow$

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} g_i(X_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(g_i(X_i)).$$

Quelques lois usuelles d'une somme de n *var* indépendantes :

$X_i \sim$	$\mathcal{E}(\lambda)$	$\Gamma(m_i, \lambda)$	$\mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$	$\chi^2(\nu_i)$
$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim$	$\Gamma(n, \lambda)$	$\Gamma\left(\sum_{i=1}^{n} m_i, \lambda\right)$	$\mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)$	$\chi^2\left(\sum_{i=1}^{n} \nu_i\right)$

Ainsi, toute *var* définie comme une combinaison linéaire de n *var* indépendantes suivant chacune une loi normale suit une loi normale.

Résultat clé sur la loi du Chi-deux : $X_1, \ldots, X_n$ *iid*, $X_i \sim \mathcal{N}(0,1) \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n)$.

Matrice de covariance :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \mathbb{V}(X_1) & \mathbb{C}(X_1,X_2) & \ldots & \ldots & \mathbb{C}(X_1,X_n) \\ \mathbb{C}(X_2,X_1) & \mathbb{V}(X_2) & \ldots & \ldots & \mathbb{C}(X_2,X_n) \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \mathbb{C}(X_{n-1},X_n) \\ \mathbb{C}(X_n,X_1) & \ldots & \ldots & \ldots & \mathbb{V}(X_n) \end{pmatrix}.$$

Espérance et variance d'une somme de n *var* :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i), \quad \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) + 2\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} \mathbb{C}(X_i,X_j).$$

$X_1, \ldots, X_n$ indépendantes $\Rightarrow$

$$\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i).$$

Bilinéarité de la covariance :

$$\mathbb{C}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i, \sum_{j=1}^{q} b_j Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{q} a_i b_j \mathbb{C}(X_i, Y_j).$$

Paramètres d'un vecteur de *var* : Les principaux paramètres d'un vecteur (colonne) de *var* $X = (X_1, \ldots, X_n)^t$ sont son espérance : $\mathbb{E}_n(X) = (\mathbb{E}(X_1), \ldots, \mathbb{E}(X_n))^t$, et sa matrice de covariance Σ.

Propriété : Soient Z un vecteur de n *var* d'espérance μ et de matrice de covariance Σ, A une matrice à n colonnes et q lignes, c un vecteur colonne à q composantes et $W = AZ + c$. Alors

- l'espérance de W est $\mu_* = A\mu + c$,
- la matrice de covariance de W est $\Sigma_* = A\Sigma A^t$.

Fonction caractéristique d'un vecteur de *var* à densité :

$$\begin{aligned}\varphi(t_1,\ldots,t_n) &= \mathbb{E}(e^{it_1X_1+\ldots+it_nX_n}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} e^{it_1X_1+\ldots+it_nX_n} f_{(X_1,\ldots,X_n)}(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n, \qquad (t_1,\ldots,t_n)\in\mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

Vecteur gaussien :

- $(X_1,\ldots,X_n)^t$ est un vecteur aléatoire réel gaussien (vecteur gaussien) (vecteur colonne) $\Leftrightarrow$ toute les combinaisons linéaires de $X_1,\ldots,X_n$ suivent une loi normale : pour tout $(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}^n-\{(0,\ldots,0)\}$, $\sum_{i=1}^{n} a_iX_i$ suit une loi normale.
- Un vecteur gaussien $X=(X_1,\ldots,X_n)^t$ est caractérisé par son espérance μ et sa matrice de covariance Σ. La loi de X est notée $\mathcal{N}_n(\mu,\Sigma)$.

Lois marginales : Si $(X_1,\ldots,X_n)^t$ est un vecteur gaussien, alors, pour tout $i\in\{1,\ldots,n\}$, X_i suit une loi normale.

Propriété d'indépendance : Si $(X_1,\ldots,X_n)^t$ est un vecteur gaussien alors X_i et X_j indépendantes $\Leftrightarrow$ $\mathbb{C}(X_i,X_j)=0$.

Densité et fonction caractéristique d'un vecteur gaussien : Soit $(X_1,\ldots,X_n)^t\sim\mathcal{N}_n(\mu,\Sigma)$ avec $\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_n)^t$.

- Si $\det(\Sigma)>0$, alors $(X_1,\ldots,X_n)^t$ possède la densité :

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\det(\Sigma)}}e^{-\frac{1}{2}(x_1-\mu_1,\ldots,x_n-\mu_n)\Sigma^{-1}(x_1-\mu_1,\ldots,x_n-\mu_n)^t},$$

  $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$.
- La fonction caractéristique de $(X_1,\ldots,X_n)^t$ est

$$\varphi(t_1,\ldots,t_n)=e^{i(\mu_1,\ldots,\mu_d)(t_1,\ldots,t_n)^t-\frac{1}{2}(t_1,\ldots,t_n)\Sigma(t_1,\ldots,t_n)^t}, \qquad (t_1,\ldots,t_n)\in\mathbb{R}^n.$$

Résultat en loi : Soient $Z\sim\mathcal{N}_n(\mu,\Sigma)$, A une matrice à n colonnes et q lignes, c un vecteur colonne à q composantes et W tel que $W=AZ+c$. Alors on a

$$W\sim\mathcal{N}_q(A\mu+c,A\Sigma A^t).$$

Lois usuelles associées à la loi normale : Soient $X_1, \ldots, X_n$ n *var iid* suivant chacune la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. On pose

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}_n\right)^2.$$

Alors on a

$$\mathbb{E}(\overline{X}_n) = \mu, \qquad \mathbb{E}(S_n^2) = \sigma^2.$$

De plus :

var	$\sqrt{n}\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}\right)$	$\frac{n-1}{\sigma^2} S_n^2$	$\sqrt{n}\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n}\right)$	$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2$
Loi	$\mathcal{N}(0,1)$	$\chi^2(n-1)$	$\mathcal{T}(n-1)$	$\chi^2(n)$

17 Convergences de suites de *var* ; généralité

Suite de *var* indépendantes : $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de *var* indépendantes $\Leftrightarrow$ toute sous-famille finie extraite de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille de *var* indépendantes.

Convergence en probabilité : $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers X $\Leftrightarrow$ pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0.$$

Loi faible des grands nombres : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* admettant un moment d'ordre 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Alors $(\overline{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $\mathbb{E}(X_1)$.

Convergence en loi : Une suite de *var* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X $\Leftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ en tout point de continuité x de F_X $\Leftrightarrow$ pour toute fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue bornée, on a $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(g(X_n)) = \mathbb{E}(g(X))$ $\Leftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} \varphi_{X_n}(t) = \varphi_X(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Théorème central limite : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* admettant un moment d'ordre 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad Z_n = \frac{\overline{X}_n - \mathbb{E}(\overline{X}_n)}{\sigma(\overline{X}_n)} = \sqrt{n}\left(\frac{\overline{X}_n - \mathbb{E}(X_1)}{\sigma(X_1)}\right).$$

Alors la suite de *var* $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une *var* Z suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

Théorème de continuité (continuous mapping theorem) :

- $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $X \Rightarrow$ pour toute fonction $g : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ continue, sauf, éventuellement, en un nombre fini de points, $(g(X_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $g(X)$.
- $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers $X \Rightarrow$ pour toute fonction $g : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ continue, sauf, éventuellement, en un nombre fini de points, $(g(X_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers $g(X)$.

Convergence dans $\mathbb{L}^p$: $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathbb{L}^p$ vers X $\Leftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(|X_n - X|^p\right) = 0$.

Hiérarchie :

- Convergence dans $\mathbb{L}^p$ vers X $\Rightarrow$ convergence en probabilité vers X $\Rightarrow$ convergence en loi vers X.
- Convergence en probabilité vers 0 $\Leftrightarrow$ convergence en loi vers 0.

Convergence presque sûre : $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement (ps) vers X $\Leftrightarrow$

$$\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega;\ \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1.$$

Critère de convergence *ps* : Pour tout $\epsilon > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) < \infty$ $\Rightarrow$ $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge ps vers X.

Loi forte des grands nombres : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* admettant une espérance. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Alors $(\overline{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge ps vers $\mathbb{E}(X_1)$.

Hiérarchie : Convergence ps $\Rightarrow$ convergence en probabilité $\Rightarrow$ convergence en loi. En revanche, il n'y a pas d'implication entre la convergence dans $\mathbb{L}^p$ et la convergence ps.

18 Introduction à l'estimation paramétrique

n-échantillon : On appelle n-échantillon d'une *var* X n *var* $X_1, \ldots, X_n$ *iid* suivant la même loi que celle de X.

Estimation paramétrique : Soit X une *var* dont la loi dépend d'au moins un paramètre θ inconnu. L'objectif est d'évaluer ce paramètre à l'aide d'un n-échantillon $X_1, \ldots, X_n$ de X.

Estimateur : On appelle estimateur $\widehat{\theta}_n$ de θ toute fonction de $X_1, \ldots, X_n$.

Biais :

$$B(\widehat{\theta}_n, \theta) = \mathbb{E}(\widehat{\theta}_n) - \theta.$$

$\widehat{\theta}_n$ est sans biais (de θ) $\Leftrightarrow$ $B(\widehat{\theta}_n, \theta) = 0$ $\Leftrightarrow$ $\mathbb{E}(\widehat{\theta}_n) = \theta$.

Risque quadratique :

$$R(\widehat{\theta}_n, \theta) = \mathbb{E}((\widehat{\theta}_n - \theta)^2).$$

Plus $R(\widehat{\theta}_n, \theta)$ est petit, plus l'estimateur $\widehat{\theta}_n$ estime bien θ.

Si $\widehat{\theta}_n$ est sans biais, alors on a $R(\widehat{\theta}_n, \theta) = \mathbb{V}(\widehat{\theta}_n)$.

Estimateur consistant : $\widehat{\theta}_n$ est consistant $\Leftrightarrow$ $(\widehat{\theta}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers θ.

Méthode des moments : La méthode des moments permet de construire un estimateur $\widehat{\theta}_n$ de θ :

1. On détermine une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\mathbb{E}(X_1) = g(\theta)$.
2. On isole θ en fonction de $\mathbb{E}(X_1)$: $\theta = g^{-1}(\mathbb{E}(X_1))$.
3. On estime $\mathbb{E}(X_1)$ par $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.
4. L'estimateur $\widehat{\theta}_n$ de θ par la méthode des moments est : $\widehat{\theta}_n = g^{-1}(\overline{X}_n)$.

Intervalle de confiance : On appelle intervalle de confiance pour θ au niveau $100(1-\alpha)\%$, $\alpha \in]0,1[$, un intervalle de la forme $I_\theta = [a(X_1, \ldots, X_n), b(X_1, \ldots, X_n)]$, où $a(X_1, \ldots, X_n)$ et $b(X_1, \ldots, X_n)$ désignent deux fonctions dépendantes de $X_1, \ldots, X_n$, tel que

$$\mathbb{P}(\theta \in I_\theta) = 1 - \alpha.$$

Pour que I_θ contienne avec une forte probabilité θ, on prend α petit : $\alpha = 0,05$, $\alpha = 0,01$ ...

En pratique, on dispose de données $x_1, \ldots, x_n$, lesquelles sont des réalisations de $X_1, \ldots, X_n$. Une réalisation de I_θ est donc :

$$i_\theta = [a(x_1, \ldots, x_n), b(x_1, \ldots, x_n)],$$

donnant ainsi un intervalle de valeurs dans lequel θ a $100(1-\alpha)\%$ de chances d'appartenir.

Les intervalles de confiance associés à une *var* X suivant une loi normale sont donnés dans la Section 18 page 69.

Hypothèse statistique : On appelle hypothèse statistique une hypothèse inhérente au contexte de l'étude. À la base d'un test statistique, il y a deux hypothèses complémentaires, notées H_0 et H_1,

- l'hypothèse H_0 formule ce que l'on souhaite rejeter/réfuter,
- l'hypothèse H_1 formule ce que l'on souhaite montrer.

Par exemple, si on veut montrer l'hypothèse "le produit est non conforme", H_0 et H_1 s'opposent sous la forme :

H_0 : "le produit est conforme" contre H_1 : "le produit est non conforme".

Test statistique : On appelle test statistique une démarche/procédure qui vise à apporter une réponse à la question : est-ce que les données nous permettent de rejeter H_0/accepter H_1 avec un faible risque de se tromper ?

p-valeur : On appelle p-valeur le plus petit réel $\alpha \in]0,1[$ calculé à partir des données tel que l'on puisse se permettre de rejeter H_0 au risque $100\alpha\%$. Les logiciels actuels affichent cette p-valeur.

Degré de significativité : La p-valeur nous donne un degré de significativité du rejet de H_0.

Le rejet de H_0 est dit :

- significatif si p-valeur $\in]0.01,\ 0.05]$, symbolisé par $*$,
- très significatif si p-valeur $\in]0.001,\ 0.01]$, symbolisé par $**$,
- hautement significatif si p-valeur < 0.001, symbolisé par $***$.

Il y a non rejet de H_0 si p-valeur > 0.05.

S'il y a non-rejet de H_0, sauf convention, on ne peut rien conclure du tout (avec le risque considéré).

En revanche, peut-être qu'un risque de départ plus élevé ou la disposition de plus de données peuvent conduire à un rejet de H_0.

Les tests statistiques associés à une *var* X suivant une loi normale sont présentés dans la Section 19 page 70.

19 Intervalles de confiance

Lois : $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, $T \sim \mathcal{T}(\nu)$, $K \sim \chi^2(\nu)$, $\nu = n-1$. Niveau : $100(1-\alpha)\%$, $\alpha \in]0,1[$.

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	valeurs	i_μ
σ connu Z-IntConf	$\mathbb{P}(\lvert Z\rvert \geq z_\alpha) = \alpha$	$\left[\overline{x} - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$
σ inconnu T-IntConf	$\mathbb{P}(\lvert T\rvert \geq t_\alpha(\nu)) = \alpha$	$\left[\overline{x} - t_\alpha(\nu) \frac{s}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + t_\alpha(\nu) \frac{s}{\sqrt{n}}\right]$
$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	valeurs	i_{σ^2}
Chi-Square-IntConf	$\mathbb{P}(K \geq a_\alpha(\nu)) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ $\mathbb{P}(K \geq b_\alpha(\nu)) = \frac{\alpha}{2}$	$\left[\frac{n-1}{b_\alpha(\nu)} s^2,\ \frac{n-1}{a_\alpha(\nu)} s^2\right]$
$n \geq 31$ (parfois utilisé)	$\mathbb{P}(\lvert Z\rvert \geq z_\alpha) = \alpha$	$\left[\frac{2(n-1)s^2}{\left(\sqrt{2n-3} + z_\alpha\right)^2},\ \frac{2(n-1)s^2}{\left(\sqrt{2n-3} - z_\alpha\right)^2}\right]$
$X \sim \mathcal{B}(p)$	valeurs	i_p
$n \geq 31$ $np_1 \geq 5$, $n(1-p_2) \geq 5$ Prop-Z-IntConf	$\mathbb{P}(\lvert Z\rvert \geq z_\alpha) = \alpha$	$\left[\overline{x} - z_\alpha \frac{\sqrt{\overline{x}(1-\overline{x})}}{\sqrt{n-1}},\ \overline{x} + z_\alpha \frac{\sqrt{\overline{x}(1-\overline{x})}}{\sqrt{n-1}}\right] = [p_1, p_2]$
X de loi quelconque	valeurs	$i_{\mathbb{E}(X)}$
$n \geq 1000$ Z-IntConf-Lim	$\mathbb{P}(\lvert Z\rvert \geq z_\alpha) = \alpha$	$\left[\overline{x} - z_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}}\right]$

20 Tests de conformité

Lois : $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, $T \sim \mathcal{T}(\nu)$, $K \sim \chi^2(\nu)$, $\nu = n-1$. Rejet de H_0 au risque $100\alpha\%$ $\Leftrightarrow$ p-valeur $\leq \alpha$.

$X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$	H_0	H_1	Stat. test obs.	p-valeurs
σ connu : Z-Test	$\mu = \mu_0$ $\mu \leq \mu_0$ $\mu \geq \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$ $\mu > \mu_0$ $\mu < \mu_0$	$z_{obs} = \sqrt{n}\left(\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma}\right)$	$\mathbb{P}(\|Z\| \geq \|z_{obs}\|)$ $\mathbb{P}(Z \geq z_{obs})$ $\left(= \frac{1}{2}\mathbb{P}(\|Z\| \geq z_{obs}) \text{ si } z_{obs} > 0\right)$ $\mathbb{P}(Z \leq z_{obs})$ $\left(= \frac{1}{2}\mathbb{P}(\|Z\| \geq -z_{obs}) \text{ si } z_{obs} < 0\right)$
σ inconnu : T-Test	$\mu = \mu_0$ $\mu \leq \mu_0$ $\mu \geq \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$ $\mu > \mu_0$ $\mu < \mu_0$	$t_{obs} = \sqrt{n}\left(\frac{\overline{x}-\mu_0}{s}\right)$	$\mathbb{P}(\|T\| \geq \|t_{obs}\|)$ $\mathbb{P}(T \geq t_{obs})$ $\left(= \frac{1}{2}\mathbb{P}(\|T\| \geq t_{obs}) \text{ si } t_{obs} > 0\right)$ $\mathbb{P}(T \leq t_{obs})$ $\left(= \frac{1}{2}\mathbb{P}(\|T\| \geq -t_{obs}) \text{ si } t_{obs} < 0\right)$
1-Chi2-Test	$\sigma^2 = \sigma_0^2$ $\sigma^2 \leq \sigma_0^2$ $\sigma^2 \geq \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ $\sigma^2 > \sigma_0^2$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$	$\chi^2_{obs} = \frac{n-1}{\sigma_0^2}s^2$	$2\min\left(\mathbb{P}(K \geq \chi^2_{obs}),\ \mathbb{P}(K \leq \chi^2_{obs})\right)$ $\mathbb{P}(K \geq \chi^2_{obs})$ $\mathbb{P}(K \leq \chi^2_{obs})$
$n \geq 31$ (parfois utilisé)	$\sigma^2 = \sigma_0^2$ $\sigma^2 \leq \sigma_0^2$ $\sigma^2 \geq \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ $\sigma^2 > \sigma_0^2$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$	$z_{obs} = \sqrt{\frac{2(n-1)}{\sigma_0^2}s^2} - \sqrt{2n-3}$	$\mathbb{P}(\|Z\| \geq \|z_{obs}\|)$ $\mathbb{P}(Z \geq z_{obs})$ $\left(= \frac{1}{2}\mathbb{P}(\|Z\| \geq z_{obs}) \text{ si } z_{obs} > 0\right)$ $\mathbb{P}(Z \leq z_{obs})$ $\left(= \frac{1}{2}\mathbb{P}(\|Z\| \geq -z_{obs}) \text{ si } z_{obs} < 0\right)$
$X \sim \mathcal{B}(p)$	H_0	H_1	stat. test obs. et *var*	p-valeurs
$n \geq 31$, $np_0 \geq 5$, $n(1-p_0) \geq 5$: 1-Prop-Z-Test	$p = p_0$ $p \leq p_0$ $p \geq p_0$	$p \neq p_0$ $p > p_0$ $p < p_0$	$z_{obs} = \sqrt{n}\left(\frac{\overline{x}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\right)$	$\mathbb{P}(\|Z\| \geq \|z_{obs}\|)$ $\mathbb{P}(Z \geq z_{obs})$ $\left(= \frac{1}{2}\mathbb{P}(\|Z\| \geq z_{obs}) \text{ si } z_{obs} > 0\right)$ $\mathbb{P}(Z \leq z_{obs})$ $\left(= \frac{1}{2}\mathbb{P}(\|Z\| \geq -z_{obs}) \text{ si } z_{obs} < 0\right)$

(Table 1) Loi normale 1

Soit $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. La table ci-dessous donne, pour un α choisi, la valeur z_α telle que $\mathbb{P}(|Z| \geq z_\alpha) = \alpha$.

α	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,00	∞	2,576	2,326	2,170	2,054	1,960	1,881	1,812	1,751	1,695
0,10	1,645	1,598	1,555	1,514	1,476	1,440	1,405	1,372	1,341	1,311
0,20	1,282	1,254	1,227	1,200	1,175	1,150	1,126	1,103	1,080	1,058
0,30	1,036	1,015	0,994	0,974	0,954	0,935	0,915	0,896	0,878	0,860
0,40	0,842	0,824	0,806	0,789	0,772	0,755	0,739	0,722	0,706	0,690
0,50	0,674	0,659	0,643	0,628	0,613	0,598	0,583	0,568	0,553	0,539
0,60	0,524	0,510	0,496	0,482	0,468	0,454	0,440	0,426	0,412	0,399
0,70	0,385	0,372	0,358	0,345	0,332	0,319	0,305	0,292	0,279	0,266
0,80	0,253	0,240	0,228	0,215	0,202	0,189	0,176	0,164	0,151	0,138
0,90	0,126	0,113	0,100	0,088	0,075	0,063	0,050	0,038	0,025	0,013

(Table 2) Loi normale 2

Soit $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. La table de valeurs ci-dessous donne les valeurs de $F(x) = \mathbb{P}(Z \leq x)$, avec $x \in [0; 3,99]$ et $x = x_1 + x_2$.

x_1 \ x_2	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

(Table 3) Loi normale 3

Soit $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. La table ci-dessous donne, pour un z choisi, la valeur α telle que $\mathbb{P}(|Z| \geq z) = \alpha$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,00	1,00000	0,99202	0,98404	0,97607	0,96809	0,96012	0,95216	0,94419	0,93624	0,92829
0,10	0,92034	0,91241	0,90448	0,89657	0,88866	0,88076	0,87288	0,86501	0,85715	0,84931
0,20	0,84148	0,83367	0,82587	0,81809	0,81033	0,80259	0,79486	0,78716	0,77948	0,77182
0,30	0,76418	0,75656	0,74897	0,74140	0,73386	0,72634	0,71885	0,71138	0,70395	0,69654
0,40	0,68916	0,68181	0,67449	0,66720	0,65994	0,65271	0,64552	0,63836	0,63123	0,62413
0,50	0,61708	0,61005	0,60306	0,59611	0,58920	0,58232	0,57548	0,56868	0,56191	0,55519
0,60	0,54851	0,54186	0,53526	0,52869	0,52217	0,51569	0,50925	0,50286	0,49650	0,49019
0,70	0,48393	0,47770	0,47152	0,46539	0,45930	0,45325	0,44725	0,44130	0,43539	0,42953
0,80	0,42371	0,41794	0,41222	0,40654	0,40091	0,39533	0,38979	0,38430	0,37886	0,37347
0,90	0,36812	0,36282	0,35757	0,35237	0,34722	0,34211	0,33706	0,33205	0,32709	0,32217
1,00	0,31731	0,31250	0,30773	0,30301	0,29834	0,29372	0,28914	0,28462	0,28014	0,27571
1,10	0,27133	0,26700	0,26271	0,25848	0,25429	0,25014	0,24605	0,24200	0,23800	0,23405
1,20	0,23014	0,22628	0,22246	0,21870	0,21498	0,21130	0,20767	0,20408	0,20055	0,19705
1,30	0,19360	0,19020	0,18684	0,18352	0,18025	0,17702	0,17383	0,17069	0,16759	0,16453
1,40	0,16151	0,15854	0,15561	0,15272	0,14987	0,14706	0,14429	0,14156	0,13887	0,13622
1,50	0,13361	0,13104	0,12851	0,12602	0,12356	0,12114	0,11876	0,11642	0,11411	0,11183
1,60	0,10960	0,10740	0,10523	0,10310	0,10101	0,09894	0,09691	0,09492	0,09296	0,09103
1,70	0,08913	0,08727	0,08543	0,08363	0,08186	0,08012	0,07841	0,07673	0,07508	0,07345
1,80	0,07186	0,07030	0,06876	0,06725	0,06577	0,06431	0,06289	0,06148	0,06011	0,05876
1,90	0,05743	0,05613	0,05486	0,05361	0,05238	0,05118	0,05000	0,04884	0,04770	0,04659
2,00	0,04550	0,04443	0,04338	0,04236	0,04135	0,04036	0,03940	0,03845	0,03753	0,03662
2,10	0,03573	0,03486	0,03401	0,03317	0,03235	0,03156	0,03077	0,03001	0,02926	0,02852
2,20	0,02781	0,02711	0,02642	0,02575	0,02509	0,02445	0,02382	0,02321	0,02261	0,02202
2,30	0,02145	0,02089	0,02034	0,01981	0,01928	0,01877	0,01827	0,01779	0,01731	0,01685
2,40	0,01640	0,01595	0,01552	0,01510	0,01469	0,01429	0,01389	0,01351	0,01314	0,01277
2,50	0,01242	0,01207	0,01174	0,01141	0,01109	0,01077	0,01047	0,01017	0,00988	0,00960
2,60	0,00932	0,00905	0,00879	0,00854	0,00829	0,00805	0,00781	0,00759	0,00736	0,00715
2,70	0,00693	0,00673	0,00653	0,00633	0,00614	0,00596	0,00578	0,00561	0,00544	0,00527
2,80	0,00511	0,00495	0,00480	0,00465	0,00451	0,00437	0,00424	0,00410	0,00398	0,00385
2,90	0,00373	0,00361	0,00350	0,00339	0,00328	0,00318	0,00308	0,00298	0,00288	0,00279
3,00	0,00270	0,00261	0,00253	0,00245	0,00237	0,00229	0,00221	0,00214	0,00207	0,00200
3,10	0,00194	0,00187	0,00181	0,00175	0,00169	0,00163	0,00158	0,00152	0,00147	0,00142
3,20	0,00137	0,00133	0,00128	0,00124	0,00120	0,00115	0,00111	0,00108	0,00104	0,00100
3,30	0,00097	0,00093	0,00090	0,00087	0,00084	0,00081	0,00078	0,00075	0,00072	0,00070
3,40	0,00067	0,00065	0,00063	0,00060	0,00058	0,00056	0,00054	0,00052	0,00050	0,00048
3,50	0,00047	0,00045	0,00043	0,00042	0,00040	0,00039	0,00037	0,00036	0,00034	0,00033
3,60	0,00032	0,00031	0,00029	0,00028	0,00027	0,00026	0,00025	0,00024	0,00023	0,00022
3,70	0,00022	0,00021	0,00020	0,00019	0,00018	0,00018	0,00017	0,00016	0,00016	0,00015
3,80	0,00014	0,00014	0,00013	0,00013	0,00012	0,00012	0,00011	0,00011	0,00010	0,00010
3,90	0,00010	0,00009	0,00009	0,00008	0,00008	0,00008	0,00007	0,00007	0,00007	0,00007
4,00	0,00006	0,00006	0,00006	0,00006	0,00005	0,00005	0,00005	0,00005	0,00005	0,00004

(Table 4) Loi de Student à ν degrés de liberté

Soit $T \sim \mathcal{T}(\nu)$. La table ci-dessous donne, pour un α et un ν choisis, la valeur $t_\alpha(\nu)$ telle que $\mathbb{P}\left(|T| \geq t_\alpha(\nu)\right) = \alpha$.

ν \ α	0,90	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,158	1,000	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	0,142	0,816	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	0,137	0,765	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,924
4	0,134	0,741	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,132	0,727	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869
6	0,131	0,718	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,130	0,711	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,408
8	0,130	0,706	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,129	0,703	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,129	0,700	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,129	0,697	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	0,128	0,695	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,128	0,694	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,128	0,692	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,128	0,691	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	0,128	0,690	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,128	0,689	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,127	0,688	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	0,127	0,688	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,127	0,687	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,127	0,686	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,127	0,686	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,127	0,685	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	0,127	0,685	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,127	0,684	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,127	0,684	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,127	0,684	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	0,127	0,683	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,127	0,683	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	0,127	0,683	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646

(Table 5) Loi du chi-deux à ν degrés de liberté

Soit $K \sim \chi^2(\nu)$. La table ci-dessous donne, pour un α et un ν choisis, la valeur $k_\alpha(\nu)$ telle que $\mathbb{P}(K \geq k_\alpha(\nu)) = \alpha$.

ν \ α	0,99	0,975	0,95	0,90	0,10	0,05	0,025	0,01	0,001
1	0,0002	0,001	0,004	0,016	2,71	3,84	5,02	6,63	10,83
2	0,02	0,05	0,10	0,21	4,61	5,99	7,38	9,21	13,82
3	0,11	0,22	0,35	0,58	6,25	7,81	9,35	11,34	16,27
4	0,30	0,48	0,71	1,06	7,78	9,49	11,14	13,28	18,47
5	0,55	0,83	1,15	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09	20,51
6	0,87	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81	22,46
7	1,24	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,01	18,48	24,32
8	1,65	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09	26,12
9	2,09	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67	27,88
10	2,56	3,25	3,94	4,87	15,99	18,31	20,48	23,21	29,59
11	3,05	3,82	4,57	5,58	17,28	19,68	21,92	24,73	31,26
12	3,57	4,40	5,23	6,30	18,55	21,03	23,34	26,22	32,91
13	4,11	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69	34,53
14	4,66	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,12	29,14	36,12
15	5,23	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,49	30,58	37,70
16	5,81	6,91	7,96	9,31	23,54	26,30	28,85	32,00	39,25
17	6,41	7,56	8,67	10,09	24,77	27,59	30,19	33,41	40,79
18	7,01	8,23	9,39	10,86	25,99	28,87	31,53	34,81	42,31
19	7,63	8,91	10,12	11,65	27,20	30,14	32,85	36,19	43,82
20	8,26	9,59	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57	45,31
21	8,90	10,28	11,59	13,24	29,62	32,67	35,48	38,93	46,80
22	9,54	10,98	12,34	14,04	30,81	33,92	36,78	40,29	48,27
23	10,20	11,69	13,09	14,85	32,01	35,17	38,08	41,64	49,73
24	10,86	12,40	13,85	15,66	33,20	36,42	39,36	42,98	51,18
25	11,52	13,12	14,61	16,47	34,38	37,65	40,65	44,31	52,62
26	12,20	13,84	15,38	17,29	35,56	38,89	41,92	45,64	54,05
27	12,88	14,57	16,15	18,11	36,74	40,11	43,19	46,96	55,48
28	13,56	15,31	16,93	18,94	37,92	41,34	44,46	48,28	56,89
29	14,26	16,05	17,71	19,77	39,09	42,56	45,72	49,59	58,30
30	14,95	16,79	18,49	20,60	40,26	43,77	46,98	50,89	59,70

(Table 6) Loi de Fisher à (ν_1, ν_2) degrés de liberté $(\alpha = 0,025)$

Soit $F \sim \mathcal{F}(\nu_1, \nu_2)$. La table ci-dessous donne, pour un α, un ν_1 et un ν_2 choisis, la valeur $f_\alpha(\nu_1, \nu_2)$ telle que $\mathbb{P}(F \geq f_\alpha(\nu_1, \nu_2)) = \alpha = 0,025$.

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	8	10	15	20	30
1	648	800	864	900	922	937	957	969	985	993	1001
2	38,5	39,0	39,2	39,2	39,3	39,3	39,4	39,4	39,4	39,4	39,5
3	17,4	16,0	15,4	15,1	14,9	14,7	14,5	14,4	14,3	14,2	14,1
4	12,2	10,6	9,98	9,60	9,36	9,20	8,98	8,84	8,66	8,56	8,46
5	10,0	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,76	6,62	6,43	6,33	6,23
6	8,81	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,60	5,46	5,27	5,17	5,07
7	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	4,90	4,76	4,57	4,47	4,36
8	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,43	4,30	4,10	4,00	3,89
9	7,21	5,71	5,08	4,72	4,48	4,32	4,10	3,96	3,77	3,67	3,56
10	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,85	3,72	3,52	3,42	3,31
11	6,72	5,26	4,63	4,28	4,04	3,88	3,66	3,53	3,33	3,23	3,12
12	6,55	5,10	4,47	4,12	3,89	3,73	3,51	3,37	3,18	3,07	2,96
13	6,41	4,97	4,35	4,00	3,77	3,60	3,39	3,25	3,05	2,95	2,84
14	6,30	4,86	4,24	3,89	3,66	3,50	3,29	3,15	2,95	2,84	2,73
15	6,20	4,76	4,15	3,80	3,58	3,41	3,20	3,06	2,86	2,76	2,64
16	6,12	4,69	4,08	3,73	3,50	3,34	3,12	2,99	2,79	2,68	2,57
17	6,04	4,32	4,01	3,66	3,44	3,28	3,06	2,92	2,72	2,62	2,50
18	5,98	4,56	3,95	3,61	3,38	3,22	3,01	2,87	2,67	2,56	2,44
19	5,92	4,51	3,90	3,56	3,33	3,17	2,96	2,82	2,62	2,51	2,39
20	5,87	4,46	3,86	3,51	3,29	3,13	2,91	2,77	2,57	2,46	2,35
22	5,79	4,38	3,78	3,44	3,22	3,05	2,84	2,70	2,50	2,39	2,27
24	5,72	4,32	3,72	3,38	3,15	2,99	2,78	2,64	2,44	2,33	2,21
26	5,66	4,27	3,67	3,33	3,10	2,94	2,73	2,59	2,39	2,28	2,16
28	5,61	4,22	3,63	3,29	3,06	2,90	2,69	2,55	2,34	2,23	2,11
30	5,57	4,18	3,59	3,25	3,03	2,87	2,65	2,51	2,31	2,20	2,07
40	5,42	4,05	3,46	3,13	2,90	2,74	2,53	2,39	2,18	2,07	1,94
50	5,34	3,98	3,39	3,06	2,83	2,67	2,46	2,32	2,11	1,99	1,87
60	5,29	3,93	3,34	3,01	2,79	2,63	2,41	2,27	2,06	1,94	1,82
80	5,22	3,86	3,28	2,95	2,73	2,57	2,36	2,21	2,00	1,88	1,75
100	5,18	3,83	3,25	2,92	2,70	2,54	2,32	2,18	1,97	1,85	1,71

(Table 7) Loi de Fisher à (ν_1, ν_2) degrés de liberté $(\alpha = 0,05)$

Soit $F \sim \mathcal{F}(\nu_1, \nu_2)$. La table ci-dessous donne, pour un α, un ν_1 et un ν_2 choisis, la valeur $f_\alpha(\nu_1, \nu_2)$ telle que $\mathbb{P}\left(F \geq f_\alpha(\nu_1, \nu_2)\right) = \alpha = 0,05$.

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	8	10	15	20	30
1	161	300	216	225	230	234	239	242	246	248	250
2	18,5	19	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,85	8,79	8,70	8,66	8,62
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,96	5,86	5,80	5,75
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,74	4,62	4,56	4,50
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,06	3,94	3,87	3,81
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,64	3,51	3,44	3,38
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,35	3,22	3,15	3,08
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,14	3,01	2,94	2,86
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,98	2,85	2,77	2,70
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,85	2,72	2,65	2,57
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,75	2,62	2,54	2,47
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,77	2,67	2,53	2,46	2,38
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,60	2,46	2,39	2,31
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,54	2,40	2,33	2,25
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,49	2,35	2,28	2,19
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,45	2,31	2,23	2,15
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,41	2,27	2,19	2,11
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,38	2,23	2,16	2,07
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,35	2,20	2,12	2,04
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,30	2,15	2,07	1,98
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,25	2,11	2,03	1,94
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,22	2,07	1,99	1,90
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,29	2,19	2,04	1,96	1,87
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,16	2,01	1,93	1,84
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,08	1,92	1,84	1,74
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	2,03	1,87	1,78	1,69
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,10	1,99	1,84	1,75	1,65
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,06	1,95	1,79	1,70	1,60
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,03	1,93	1,77	1,68	1,57

Index