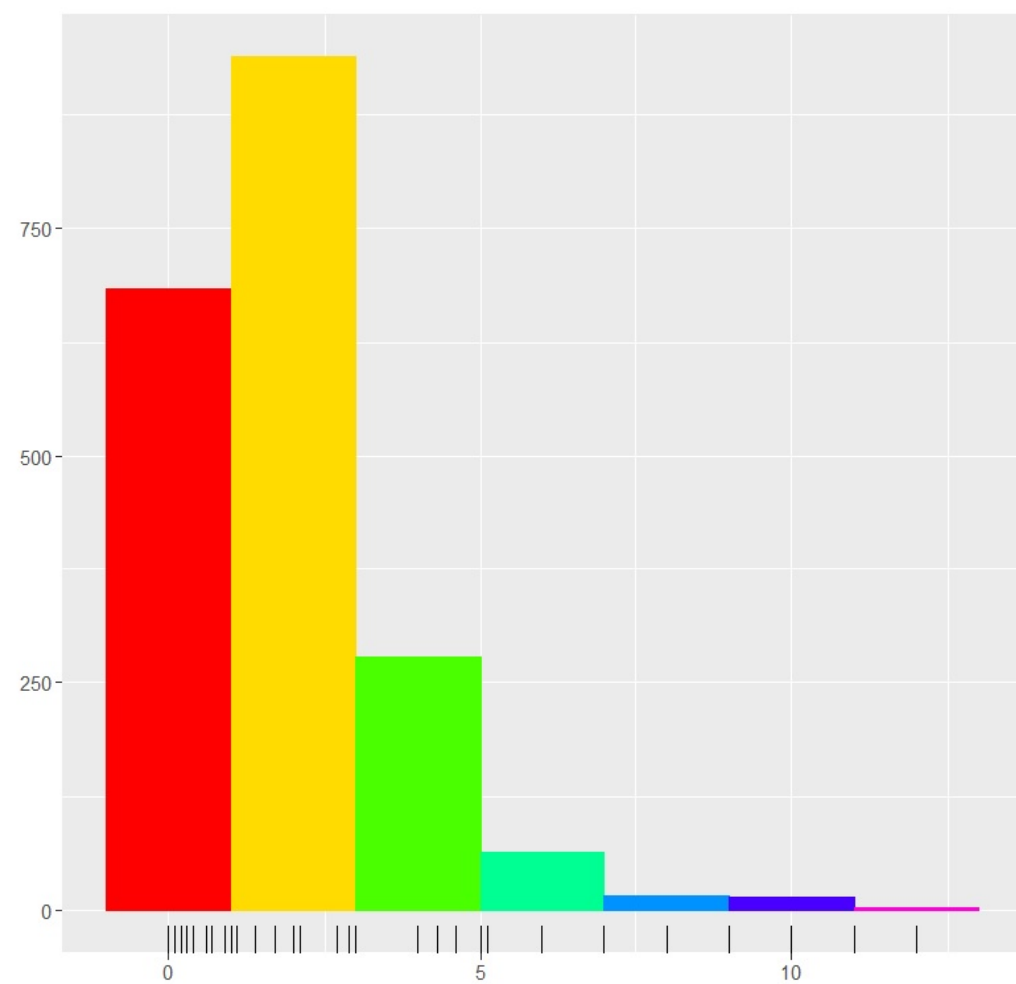
Université de Caen

Quelques notions mathématiques de base

Christophe Chesneau

https://chesneau.users.lmno.cnrs.fr/



Caen, le 28 Septembre 2017

Table des matières

∼ Note ∼

L'objectif de ce document est de présenter de manière concise quelques notions mathématiques fondamentales (utilisées souvent en probabilités entre autre).

Contact : `christophe.chesneau@gmail.com`

Bonne lecture !

1 Notions sur les ensembles

1.1 Définitions

Ensemble

Un ensemble est une collection d'objets appelés éléments. Les ensembles sont représentés en lettres majuscules (A, $B\dots$) et les éléments, en lettres minuscules (x, $y\dots$).

Il peut se représenter sous la forme accolade : $A = \{\dots\}$, par :

- extension : liste de ses éléments séparés des ",",
- compréhension : brève description ou propriété caractéristique de ses éléments.

La notation $\{x;\ \dots\}$ signifie "ensemble des valeurs x telles que $\dots$".

▷ Les éléments de $A = \{1, 2\}$ sont 1 et 2.

▷ On a $A = \{x;\ x^2 = 1\} = \{-1, 1\}$.

▷ On peut écrire $A = \{\text{numéros affichables par un dé}\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Appartenance

Soit A un ensemble. L'appartenance d'un élément x à A s'écrit $x \in A$ (prononcer "x appartient à A"). La non appartenance d'un élément x à A s'écrit $x \notin A$ (prononcer "x n'appartient pas à A").

Quand $x \in A$, on dit aussi que "x est élément de A", "x est dans A" ou "A possède x".

▷ Soit $A = \{1, 2, 3\}$. On a $1 \in A$ et $4 \notin A$.

Égalité de deux ensembles

Soient A et B deux ensembles. L'égalité de A et B se note $A = B$ (prononcer "A égal B"). Elle est caractérisée par l'équivalence : $A = B$ si, et seulement si, pour tout $x \in A$, on a $x \in B$ et, pour tout $x \in B$, on a $x \in A$. La non égalité de A et B se note $A \neq B$ (prononcer "A différent de B").

Autrement dit, deux ensembles sont égaux si, et seulement si, ils ont exactement les mêmes éléments.

▷ Soient $A = \{1, 2\}$ et $B = \{1, 2, 1, 1, 1, 1, 2\}$. On a $A = B$.

Inclusion

Soient A et B deux ensembles. L'inclusion stricte de A et B se note $A \subset B$ (prononcer "A inclus strictement dans B"). Elle est caractérisée par l'équivalence : $A \subset B$ si, et seulement si, pour tout $x \in A$, on a $x \in B$, et il existe un $y \in B$ tel que $y \notin A$.

La non inclusion stricte de A et B se note $A \not\subset B$ (prononcer "A non inclus strictement dans B").

L'inclusion stricte de A et B se note parfois "$A \subsetneq B$".

Si A et B sont deux ensembles tels que $A \subset B$, alors A est appelé partie de B.

Une partie de A est parfois appelée "sous-ensemble de A".

L'inclusion (non stricte) de A et B se note $A \subseteq B$ (prononcer "A inclus dans B"). Elle est caractérisée par l'équivalence : $A \subseteq B$ si, et seulement si, pour tout $x \in A$, on a $x \in B$, ou $A = B$.

Autrement dit, on a A inclus dans B si, et seulement si, tout élément de A est aussi élément de B.

Si $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$, alors on a $A = B$.

Ensemble vide

L'ensemble vide est l'ensemble ne contenant aucun élément. Il est noté $\varnothing$.

Pour tout ensemble A non vide, on a toujours l'inclusion $\varnothing \subset A$.

▷ On a $A = \{x;\ x < 0 \text{ et } x > 0\} = \varnothing$.

Singleton

Un ensemble à un seul élément est appelé singleton.

Ensemble des entiers

L'ensemble des entiers est l'ensemble contenant les entiers 0, 1, 2.... Il est noté $\mathbb{N}$.

On pose $\mathbb{N}^* = \{\text{entiers non nuls}\}$.

Ensemble des entiers relatifs

L'ensemble des entiers relatifs est l'ensemble contenant les entiers 0, 1, 2... ainsi que -1, -2.... Il est noté $\mathbb{Z}$.

Les entiers 0, 1, 2... sont parfois appelés entiers relatifs positifs, et les valeurs -1, -2... sont appelées entiers relatifs négatifs.

On pose $\mathbb{Z}^* = \{\text{entiers relatifs non nuls}\}$.

Ensemble des réels

L'ensemble des nombres réels est l'ensemble contenant tous les nombres positifs, négatifs ou nuls, ayant une représentation décimale finie ou infinie. Il est noté $\mathbb{R}$.

On a $\varnothing \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$.

▷ On a $\left\{-12, 5, \frac{4}{5}, -\frac{1}{1000}, \pi\right\} \subset \mathbb{R}$.

Intervalles

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$. On appelle intervalle tous les ensembles suivants :

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}$.
- $]a, b[= \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$.
- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\}$.
- $]a, b] = \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\}$.
- $[a, \infty[= \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x\}$.
- $]a, \infty[= \{x \in \mathbb{R};\ a < x\}$.
- $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R};\ x \leq a\}$.
- $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R};\ x < a\}$.

Les réels a et b sont appelées extrémités de l'intervalle $[a, b]$.

▷ On a $[1, 2] \subset \mathbb{R}_+$.

▷ On a $]1, 2[\subset [1, 2]$.

▷ On a $[1, \infty[\not\subset [0, 8]$.

On pose

- $\mathbb{R}^* = \{\text{nombres réels on nuls}\}$.
- $\mathbb{R}_+ = \{\text{nombres réels positifs}\} = [0, \infty[$.
- $\mathbb{R}_- = \{\text{nombres réels négatifs}\} =]-\infty, 0]$.
- $\mathbb{R}_+^* = \{\text{nombres réels positifs non nuls}\} =]0, \infty[$.
- $\mathbb{R}_-^* = \{\text{nombres réels négatifs non nuls}\} =]-\infty, 0[$.

1.2 Opérations sur les ensembles

Réunion

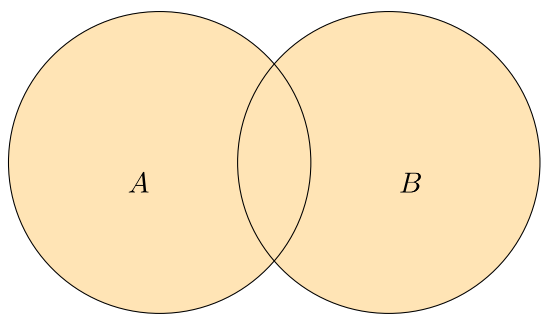
Soient A et B deux ensembles. On appelle réunion de A et B l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou B. Il est noté $A \cup B$ (prononcer "A union B").

L'ensemble $A \cup B$ est caractérisée par l'équivalence : $x \in A \cup B$ si, et seulement si, $x \in A$ ou $x \in B$.

Le mot "ou" n'est pas exclusif ; x peut appartenir à la fois à A et B.

Pour tout $A \subseteq B$, on a $A \cup B = B$. En particulier, on a $A \cup \varnothing = A$.

La partie colorée du diagramme suivant, appelé diagramme de Venn, représente $A \cup B$:



Réunion : généralisation

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_k)_{k\in\{1,\ldots,n\}}$ une famille d'ensembles. La réunion des $(A_k)_{k\in\{1,\ldots,n\}}$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A_1, ou A_2, ..., ou A_n. Il se note $\bigcup_{k=1}^n A_k$.

L'ensemble $\bigcup_{k=1}^n A_k$, est caractérisé par l'équivalence : $x \in \bigcup_{k=1}^n A_k$ si, et seulement si, il existe au moins un $k \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $x \in A_k$. Autrement écrit,

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n.$$

▷ Soient $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ et $C = \{1, 2, 6\}$. On a

$A \cup B \cup C = \{1, 2\} \cup \{2, 3, 4, 5\} \cup \{1, 2, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

▷ Soient $A = [1, 2[$, $B = [2, 5[$ et $C = [3, 6[$. On a $A \cup B \cup C = [1, 2[\cup [2, 5[\cup [3, 6[= [1, 6[$.

Intersection

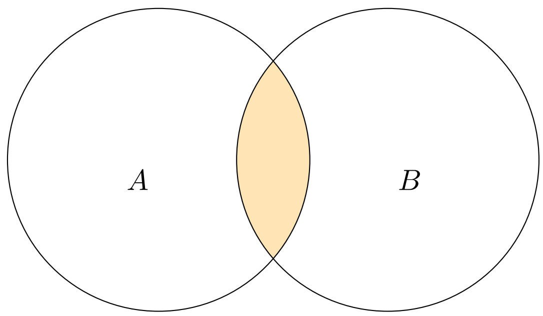
Soient A et B deux ensembles. L'intersection de A et B est l'ensemble des éléments communs à A et à B. Il est noté $A \cap B$ (prononcer "A inter B").

L'ensemble $A \cap B$ est caractérisé par l'équivalence : $x \in A \cap B$ si, et seulement si, $x \in A$ et $x \in B$.

Pour tout $A \subseteq B$, on a $A \cap B = A$. En particulier, on a $A \cap \varnothing = \varnothing$.

▷ Soient $A = \{1, 2\}$ et $B = [2, 3[$. On a $A \cap B = \{1, 2\} \cap [2, 3[= \{2\}$.

La partie colorée du diagramme suivant représente $A \cap B$:



Ensembles disjoints

Deux ensembles A et B sont dit disjoints si, et seulement si, on a $A \cap B = \varnothing$.

▷ Soient $A = \{1, 2\}$ et $B = \{3\}$. On a $A \cap B = \{1, 2\} \cap \{3\} = \varnothing$. Par conséquent, A et B sont disjoints.

Intersection : généralisation

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_k)_{k\in\{1,...,n\}}$ une famille d'ensembles. La réunion des $(A_k)_{k\in\{1,...,n\}}$ est l'ensemble des éléments communs à A_1, et A_2, ..., et A_n. Il se note $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$.

L'ensemble $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ est caractérisé par l'équivalence : $x \in \bigcap_{k=1}^{n} A_k$ si, et seulement si, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on a $x \in A_k$. Autrement écrit,

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n.$$

▷ Soient $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ et $C = [2, 3[$. On a $A \cap B \cap C = \{1, 2\} \cap \{2, 3, 4, 5\} \cap [2, 3[= \{2\}$.

▷ Soient $A = \{\text{nombres impairs}\}$, $B = \{\text{nombres multiples de } 3\}$ et $C = [1, 20]$. On a $A \cap B \cap C = \{3, 9, 15\}$.

Ensembles disjoints deux à deux

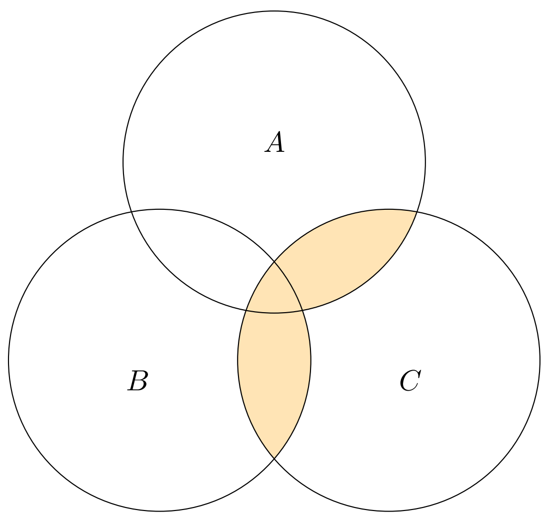
Les ensembles $(A_k)_{k\in\{1,\ldots,n\}}$ sont dit disjoints deux à deux si, et seulement si, pour tout $k \in \{1,\ldots,n\}$ et tout $l \in \{1,\ldots,n\}$ tel que $k \neq l$, on a $A_k \cap A_l = \varnothing$.

Règles de calcul

Soient A, B et C trois ensembles. On a

- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
- $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

La partie colorée du diagramme suivant représente à la fois $(A\cup B)\cap C$ et $(A\cap C)\cup(B\cap C)$, illustrant ainsi l'égalité du premier point :



Règles de calcul : généralisation

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(A_k)_{k\in\{1,\ldots,n\}}$ une famille d'ensembles et B un ensemble. On a

- $(\bigcup_{k=1}^n A_k) \cap B = \bigcup_{k=1}^n (A_k \cap B)$.
- $(\bigcap_{k=1}^n A_k) \cup B = \bigcap_{k=1}^n (A_k \cup B)$.

Ensemble des parties

Soit E un ensemble. L'ensemble des parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$ (prononcer "P de E"). Il est défini par

$$\mathcal{P}(E) = \{A;\ A \subseteq E\}.$$

L'ensemble des parties de E est parfois noté $\mathfrak{P}(E)$ ou $P(E)$.

▷ On a $\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.

Partition

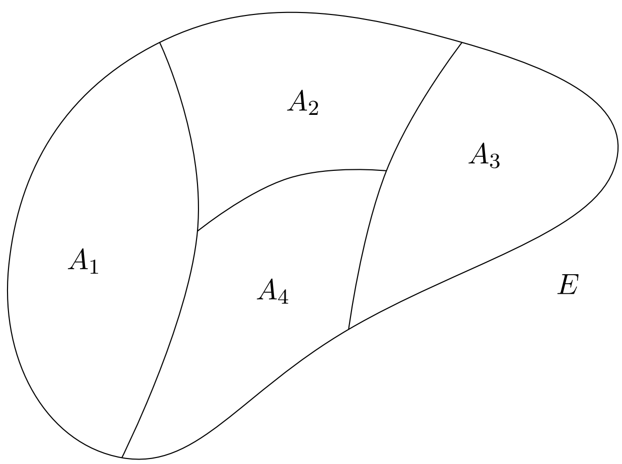
Soit E un ensemble. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_k)_{k\in\{1,\ldots,n\}}$ une famille de parties non vides de E. On dit que $(A_k)_{k\in\{1,\ldots,n\}}$ forme une partition de E si, et seulement si,

- pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$ et tout $l \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $k \neq l$, on a $A_k \cap A_l = \varnothing$.
- on a $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = E$.

▷ Soient $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ et $C = \{6, 7\}$. Comme $A \cap B = \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$ et $B \cap C = \varnothing$, avec $A \cup B \cup C = \{1, 2\} \cup \{3, 4, 5\} \cup \{6, 7\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, la famille (A, B, C) forme une partition de $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

▷ Soient $A = \{1, 2\}$ et $B = \{2, 3\}$. La famille (A, B) ne forme pas une partition de $E = \{1, 2, 3\}$ car $A \cap B = \{2\} \neq \varnothing$.

Un exemple graphique de partition est donné ci-dessous :



Complémentaire

Soient E un ensemble et A est une partie de E. Le complémentaire de A dans E est l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A. Il est noté $C_E A$.

L'ensemble $C_E A$ est caractérisé par l'équivalence : $x \in C_E A$ si, et seulement si, $x \in E$ et $x \notin A$.

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur E, le complémentaire de A est noté CA, ou $\overline{A}$, ou A^c.

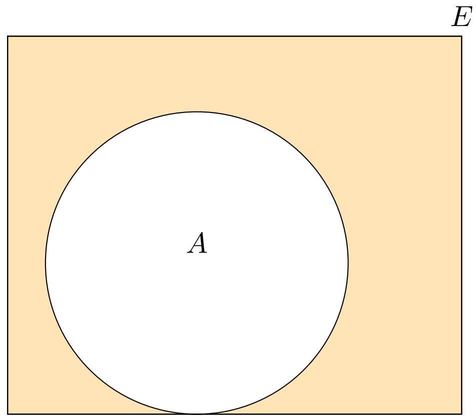
Par définition, on a $\overline{\overline{A}} = A$, $A \cap \overline{A} = \varnothing$ et $A \cup \overline{A} = E$.

▷ Soient $A = \{1, 2\}$ et $E = \{1, 2, 6\}$. On a $C_E A = \{6\}$.

▷ Soient $A = \{1, 2\}$ et $E = \mathbb{R}$. On a $C_E A =]-\infty, 1[\cup]1, 2[\cup]2, \infty[$.

▷ Soit $A = \{0\}$. On a $\overline{A} = \mathbb{R}^*$.

La partie colorée du diagramme suivant représente $C_E A$:



Règles de calcul (Lois de Morgan)

Soient A et B deux ensembles. On a

- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Lois de Morgan : généralisation

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_k)_{k\in\{1,\ldots,n\}}$ une famille d'ensembles. On a

- $\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}$.
- $\overline{\bigcap_{k=1}^{n} A_k} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{A_k}$.

Différence

Soient E un ensemble, et A et B deux parties de E. La différence de A et B est l'ensemble des éléments communs à A et à $\overline{B}$. Il est noté $A \backslash B$ (ou $A - B$) (prononcer "A moins B").

L'ensemble $A \backslash B$ est caractérisé par l'équivalence : $x \in A \backslash B$ si, et seulement si, $x \in A$ et $x \notin B$.

On peut remarquer que $A \backslash B = A \cap \overline{B}$.

▷ Soient $A = \{1, 2\}$ et $B = \{2, 3, 4, 5\}$. On a $A \backslash B = \{1\}$.

▷ Soient $A = \mathbb{Z}$ et $B =]-\infty, 0]$. On a $A \backslash B = \mathbb{N}^*$.

Produit cartésien

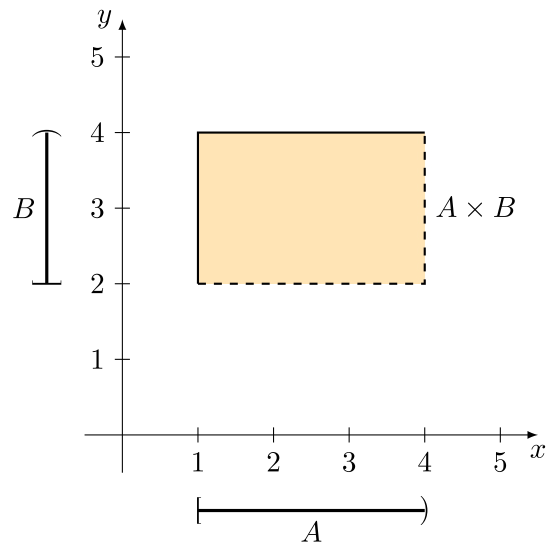
Soient E et F deux ensembles. Le produit cartésien de E et F est l'ensemble de tous les couples, dont la première composante appartient à E et la seconde à F. Il est noté $E \times F$ (prononcer "E croix F").

Autrement dit, $E \times F$ est défini par $E \times F = \{(x, y);\ x \in E,\ y \in F\}$.

On note $E \times E = E^2$. En particulier, $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

▷ On a $\{0, 1\} \times \{1, 2, 3\} = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$.

La partie colorée du diagramme suivant représente $A \times B$ avec $A = [1, 4[$ et $B =]2, 4]$:



Produit cartésien : généralisation

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(E_k)_{k\in\{1,\ldots,n\}}$ une famille de n ensembles. Le produit cartésien de $(E_k)_{k\in\{1,\ldots,n\}}$ est noté $E_1 \times \ldots \times E_n$. Il est défini par

$$E_1 \times \ldots \times E_n = \{(x_1, \ldots, x_n);\ \text{pour tout } k \in \{1, \ldots, n\}, \text{on a } \ x_k \in E_k\}.$$

On note parfois

$$E_1 \times \ldots \times E_n = \prod_{k=1}^{n} E_k$$

ou $E_1 \times \ldots \times E_n = \times_{k\in\{1,\ldots,n\}} E_k$. En particulier, si tous les ensembles sont égaux, alors on pose $\underbrace{E_1 \times \ldots \times E_1}_{n \text{ ensembles}} = E_1^n$.

1.3 Introduction au dénombrement

Ensemble fini

On dit qu'un ensemble est fini s'il est vide ou s'il contient un nombre fini d'éléments distincts deux à deux.

Dénombrer

Dénombrer un ensemble fini non vide consiste à déterminer le nombre de ses éléments.

Ensemble dénombrable

On dit qu'un ensemble est dénombrable si on peut indexer ses éléments par les entiers naturels.

Cardinal

Soit E un ensemble fini. Le nombre des éléments de E est appelé cardinal de E. Il est noté $\mathrm{Card}(E)$.

▷ Soient $A = \emptyset$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 9\}$ et $C = \{\text{mois dans une année}\}$. On a $\mathrm{Card}(A) = 0$, $\mathrm{Card}(B) = 7$ et $\mathrm{Card}(C) = 12$.

Formule du crible

Soient A et B deux ensembles finis. On a

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B).$$

En particulier, si A et B sont disjoints, alors $\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B)$.

▷ Soient A et B deux ensembles tels que $\mathrm{Card}(A) = 4$, $\mathrm{Card}(B) = 3$ et $\mathrm{Card}(A \cap B) = 1$. La formule du crible implique $\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B) = 4 + 3 - 1 = 6$.

Propriétés élémentaires

Soit E un ensemble. Soient A et B deux parties de E. On a

- $\mathrm{Card}\left(\overline{A}\right) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A)$,
- $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(A \cap B) + \mathrm{Card}\left(A \cap \overline{B}\right)$,
- $\mathrm{Card}(A \setminus B) = \mathrm{Card}(A) - \mathrm{Card}(A \cap B)$,
- si $A \subseteq B$, alors $\mathrm{Card}(A) \leq \mathrm{Card}(B)$.

Dans un cadre concret, pour rédiger la réponse d'un problème de dénombrement, l'utilisation des cardinaux n'est pas obligatoire ; cela peut se faire par le biais de phrases.

▷ Dans un lot de 15 produits, on extrait au hasard, successivement et avec remise 2 produits. On suppose que le nombre de possibilités pour tirer 2 produits est 225, et que le nombre de possibilités pour ne tirer aucun produit défectueux est 144. On cherche à calculer le nombre de possibilités pour tirer au moins un produit défectueux. Le nombre de possibilités pour tirer au moins un produit défectueux est égal au nombre de possibilités pour tirer 2 produits moins le nombre de possibilités pour ne tirer aucun produit défectueux, donc $225 - 144 = 81$.

Raisonnement utilisant les cardinaux : on pose A=$\{$tirages avec remise de 2 produits contenant au moins un produit défectueux$\}$. On cherche à calculer $\mathrm{Card}(A)$. Comme la définition de l'ensemble A fait apparaître "au moins un", il est arrangeant de considérer son complémentaire. On a $\overline{A}$= $\{$tirages avec remise de 2 produits ne contenant aucun produit défectueux$\}$= $C_E A$ où E =$\{$tirages avec remise de 2 produits$\}$. Par conséquent, on a $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}\left(\overline{A}\right) = 225 - 144 = 81$.

Cardinal d'une partition d'un ensemble

Soient E un ensemble fini, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_k)_{k\in\{1,\ldots,n\}}$ une partition de E. On a

$$\mathrm{Card}(E) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Card}(A_k).$$

Principe additif

On considère une situation qui nous amène à faire un choix parmi n cas différents et exclusifs : le cas 1, ou le cas 2, …, ou le cas n. Si, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, il y a u_k possibilités pour le k-ème cas, alors le nombre total de possibilités est

$$\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

▷ Sur un étalage, il y a 85 fruits dont 50 pommes de la variété *Delbard Jubilée*, 30 pommes de la variété *Cox Orange Pipin* et 5 oranges. Il y a donc $50 + 30 = 80$ façons différentes pour choisir une pomme.

Cardinal et produit cartésien

Soient E et F deux ensembles finis. On a

$$\text{Card}\,(E \times F) = \text{Card}(E)\,\text{Card}(F).$$

Cardinal et produit cartésien : généralisation

Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $(E_i)_{i \in \{1,\ldots,k\}}$ une famille de k ensembles finis. On a

$$\text{Card}\left(\prod_{i=1}^{k} E_i\right) = \prod_{i=1}^{k} \text{Card}(E_i).$$

En particulier, on a $\text{Card}(E^k) = (\text{Card}(E))^k$.

Principe multiplicatif

On considère une situation conjuguant k étapes : une étape 1, et une étape 2, $\ldots$, et une étape k. Si, pour tout $i \in \{1,\ldots,k\}$, il y a n_i possibilités pour la k-ème étape, alors le nombre total de possibilités est

$$\prod_{i=1}^{k} n_i.$$

▷ On le lance 3 fois un dé à 6 faces et on s'intéresse, à chaque lancer, au numéro affiché. Combien y-a-t'il de possibilités ? Il y a 6 possibilités pour le premier lancer, 6 pour le deuxième, et 6 pour le troisième. Par le principe multiplicatif, le nombre total de possibilités est $6 \times 6 \times 6 = 216$.

▷ Un code secret se compose de deux symboles : le premier doit être choisi dans la grille A et le deuxième, dans la grille B.

Grille A

$\clubsuit$	$\diamondsuit$	$\spadesuit$	$\heartsuit$	$\square$
$\lozenge$	$\blacklozenge$	$\eth$	$\bigstar$	$\mho$

Grille B

$\boxminus$	$\ominus$	$\circledast$

On cherche à calculer le nombre de codes différents. Il y a 10 possibilités pour le premier symbole, et 3 pour le deuxième. Par le principe multiplicatif, le nombre de codes différents est $3 \times 10 = 30$.

k-liste

Soit E un ensemble fini. Une k-liste de E est une liste de k éléments de E. Celle-ci est de la forme

$$(e_1, \ldots, e_k),$$

où, pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, $e_i \in E$.

Les éléments d'une k-liste ne sont pas nécessairement distincts deux à deux ; ils peuvent apparaître plusieurs fois. L'ordre des éléments est important.

▷ On pose $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Alors $(1, 2, 3)$, $(1, 2, 2)$, $(5, 2, 1)$ et $(1, 2, 5)$ sont des 3-listes de E. Celles-ci sont toutes différentes ; $(5, 2, 1)$ n'est pas égale à $(1, 2, 5)$.

Cardinal de l'ensemble des k-listes d'un ensemble

Soient $(n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et E un ensemble fini à n éléments. Le nombre de k-listes de E est n^k. Autrement écrit,

$$\mathrm{Card}(\{k\text{-listes de } E\}) = n^k.$$

▷ Combien de numéros de téléphone différents à 8 chiffres peut-on faire ? Il y a 10 possibilités pour le premier chiffre, 10 pour le deuxième, et ainsi de suite jusqu'au huitième. Par le principe multiplicatif, le nombre de numéros de téléphone différents à 8 chiffres est $\underbrace{10 \times \ldots \times 10}_{8 \text{ termes}} = 10^8 = 100000000$.

Autre formulation : on s'intéresse au nombre de 8-listes d'un ensemble à 10 éléments. Le résultat est $10^8 = 100000000$.

Arrangement

Soit E un ensemble fini. Un arrangement de k éléments de E est une k-liste de E constituée d'éléments distincts deux à deux.

Ainsi, $(1, 2, 3)$ et $(3, 2, 1)$ sont deux arrangements de 3 éléments de $E = \{1, 2, 3\}$. Ils sont différents : on a $(1, 2, 3) \neq (3, 2, 1)$. Par contre, $(1, 3, 3)$ n'est pas un arrangement de 3 éléments de E car deux éléments sont égaux.

Un arrangement de k éléments d'un ensemble fini E à n éléments se construit par des choix successifs ordonnés et sans répétition de k éléments parmi n.

Cardinal de l'ensemble des arrangements d'un ensemble

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ et E un ensemble à n éléments. Le nombre d'arrangements de k éléments de E (ou parmi n) est

$$A_n^k = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1).$$

Autrement écrit,

$$\text{Card}(\{\text{arrangements de } k \text{ éléments de } E\}) = A_n^k = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1).$$

▷ Au jeu du Tiercé, il y a 12 chevaux au départ d'une course, et on ne classe que les 3 premiers ayant franchi la ligne d'arrivée. On cherche à calculer le nombre de classements différents. Il y a 12 possibilités pour le premier arrivé, 11 pour le deuxième et 10 pour le troisième. Par le principe multiplicatif, le nombre de classements différents est $12 \times 11 \times 10 = 1320$.

Autre formulation : on s'intéresse au nombre d'arrangements de 3 éléments parmi 12. Le résultat est $A_{12}^3 = 12 \times 11 \times 10 = 1320$.

Permutation

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble fini à n éléments. Une n-liste d'éléments distincts de E est appelée permutation de E.

Cardinal de l'ensemble des permutations d'un ensemble

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble fini à n éléments. Le nombre de permutations de E est $A_n^n = n \times (n-1) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$. Autrement écrit,

$$\text{Card}(\{\text{permutations de } E\}) = A_n^n = n \times (n-1) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1.$$

Combinaison

Soit E un ensemble fini. Une combinaison de k éléments de E est une partie à k éléments de E. Celle-ci est de la forme

$$\{e_1, \ldots, e_k\},$$

où, pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, $e_i \in E$. Les éléments sont tous distincts deux à deux.

Ainsi, $\{1,2,3\}$ est une combinaison de 3 éléments de $E=\{1,2,3,4\}$, $\{1,2,2\}$ n'est pas une combinaison de 3 éléments de E, et $\{3,2,1\}=\{1,2,3\}$.

Une combinaison de k éléments d'un ensemble fini E à n éléments se construit, par exemple, en choisissant simultanément k éléments parmi n.

▷ Tous les arrangements et combinaisons de 2 éléments de $E=\{a,b,c\}$ sont reportés dans le tableau suivant :

Arrangements	(a,b)	(a,c)	(b,a)
	(b,c)	(c,a)	(c,b)
Combinaisons	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$

Cardinal de l'ensemble des combinaisons

Soient $n\in\mathbb{N}^*$, $k\in\{1,\ldots,n\}$ et E un ensemble fini à n éléments. Le nombre de combinaisons de k éléments de E (ou parmi n) est donné par un entier appelé "coefficient binomial" noté $\binom{n}{k}$. Pour une première approche, on le défini par

$$\binom{n}{k}=\frac{A_n^k}{k\times(k-1)\times\ldots\times 2\times 1}.$$

Autrement écrit,

$$\mathrm{Card}(\{\text{combinaisons de } k \text{ éléments parmi } n\})=\binom{n}{k}=\frac{A_n^k}{k\times(k-1)\times\ldots\times 2\times 1}.$$

▷ Lors d'un spectacle, un magicien demande à un spectateur de tirer au hasard et simultanément 3 cartes dans un jeu standard de 32 cartes. On cherche à calculer le nombre de possibilités.

Comme on s'intéresse au nombre de combinaisons de 3 éléments parmi 32, le résultat est

$$\binom{32}{3}=\frac{A_{32}^3}{3\times 2\times 1}=\frac{32\times 31\times 30}{3\times 2\times 1}=4960.$$

Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble

Soit E un ensemble fini à n éléments. Le nombre de parties de E est 2^n. Autrement écrit,

$$\mathrm{Card}\,(\mathcal{P}(E))=2^n.$$

1.4 Application - fonction

Notion d'application - fonction

Une application f est la donnée de deux ensembles, l'ensemble de départ E et l'ensemble d'arrivée F, et d'une relation associant à chaque élément x de E un et un seul élément de F. Cet élément est appelé image de x par f. On le note $f(x)$. On dit alors que f est une application de E dans F notée $f : E \to F$.

En général, quand $F = \mathbb{R}$ ou quand F est un intervalle de $\mathbb{R}$, alors on emploie plutôt le terme "fonction" au lieu de "application".

Quand il n'y a aucun intérêt à préciser l'ensemble d'arrivée F, on adopte parfois la notation "$f(x) = \ldots, x \in E$".

Domaine de définition

Le domaine de définition d'une fonction f est l'ensemble de tous les réels x pour lesquels $f(x)$ existe ou est calculable. Il est noté $\mathcal{D}_f$.

Continuité

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite continue en x_0 si, et seulement si, on a

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Elle est dite continue sur I si, et seulement si, elle est continue en tout point de I.

Quelques fonctions usuelles

On présente ci-dessous plusieurs fonctions $f : E \to F$ usuelles avec $E = \mathcal{D}_f$ et $F \subseteq \mathbb{R}$.

Les fonctions présentées seront toutes continues sur $\mathcal{D}_f$.

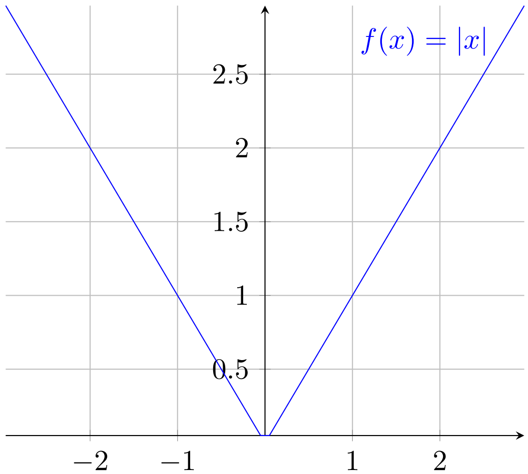
Fonction valeur absolue.

La fonction valeur absolue est l'application $f : \mathbb{R} \to [0, \infty[$ définie par

$$f(x) = \max(x, -x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Elle est notée $f(x) = |x|$.

La courbe de $f(x) = |x|$ est représentée ci-dessous :



Propriétés de la valeur absolue.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}^*$, on a

$$|xy| = |x| \times |y|, \qquad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

- On a $|x| = a$ si, et seulement si, $x = a$ ou $x = -a$.
- On a $|x| \leq a$ si, et seulement si, $-a \leq x \leq a$.
- On a $|x| \geq a$ si, et seulement si, $x \geq a$ ou $x \leq -a$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, on a

$$||x| - |y|| \leq |x - y| \leq |x| + |y|.$$

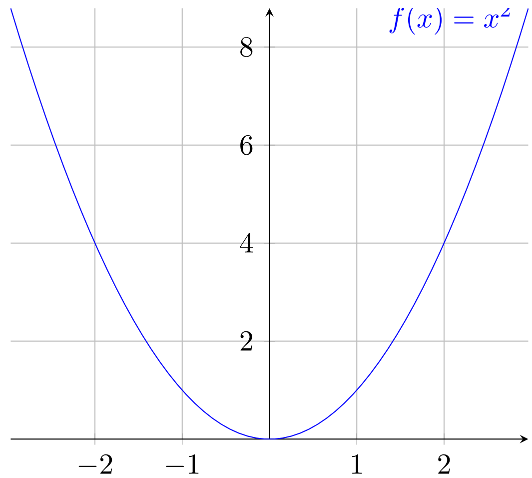
  Cette inégalité est appelée "inégalité triangulaire".

Fonction puissance entière.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction "puissance entière" est l'application $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^n.$$

Pour $n = 2$, la courbe de $f(x) = x^n$ est représentée ci-dessous :



Propriétés des puissances entières.

Soient $x \in \mathbb{R}^*$ et $y \in \mathbb{R}^*$.

- On a $x^0 = 1$.
- Pour tout entier n, on a $x^n = x \times \ldots \times x$ (n fois),

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \qquad (x \times y)^n = x^n \times y^n.$$

- Pour tout entier n et tout entier m, on a

$$x^n \times x^m = x^{n+m}, \qquad \frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}, \qquad (x^n)^m = x^{n \times m}.$$

Fonction logarithme népérien.

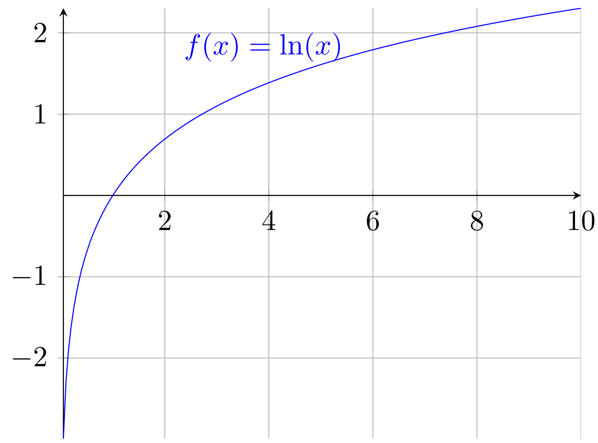
La fonction "logarithme népérien" est l'application $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ continue, non constante telle que, pour tout $x \in]0, \infty[$ et tout $y \in]0, \infty[$, on a

$$f(x \times y) = f(x) + f(y).$$

Elle est notée

$$f(x) = \ln(x).$$

La courbe de $f(x) = \ln(x)$ est représentée ci-dessous :



Propriétés du logarithme népérien.

- On a $\ln(1) = 0$.
- Pour tout $x \in]0, \infty[$ et tout $y \in]0, \infty[$, on a

$$\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y), \qquad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y).$$

- Pour tout $x \in]0, \infty[$ et tout $\alpha > 0$, on a $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$.

Fonction exponentielle.

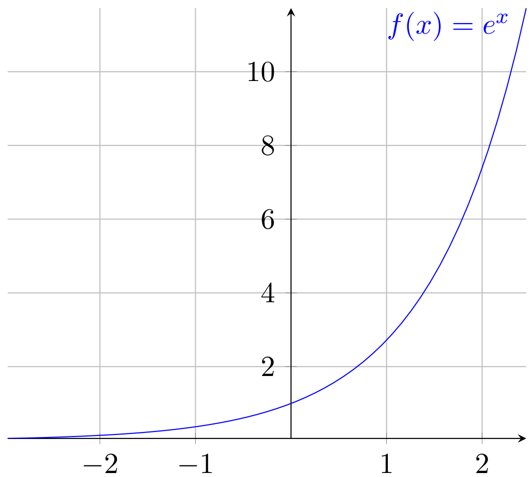
La fonction "exponentielle" est l'application $f : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ vérifiant

$$\begin{cases} \ln(f(x)) = x \ , \\ f(\ln(x)) = x \ . \end{cases}$$

Elle est notée

$$f(x) = e^x.$$

La courbe de $f(x) = e^x$ est représentée ci-dessous :



Propriétés de l'exponentielle.

- On a $e^0 = 1$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$. On a

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}, \qquad e^{x+y} = e^x \times e^y, \qquad (e^x)^y = e^{x \times y}.$$

Fonction puissance réelle.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction "puissance réelle" est l'application $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = e^{\alpha \ln(x)} = x^\alpha.$$

Propriétés des puissances réelles.

Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$.

- Pour tout réel $\alpha > 0$, on a

$$x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}, \qquad (x \times y)^\alpha = x^\alpha \times y^\alpha.$$

- Pour tout réel α et tout réel β, on a

$$x^\alpha \times x^\beta = x^{\alpha+\beta}, \qquad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha \times \beta}.$$

À ces applications élémentaires, il faut rajouter toutes les fonctions circulaires (cosinus, sinus, tangente...).

Image et image réciproque d'un ensemble par une application

Soient E et F deux ensembles. Soit $f : E \to F$ une application. Soient A une partie de E, et B une partie de F.

- L'image de A par f est un ensemble noté $f(A)$. Elle est définie par

$$f(A) = \{y \in F;\ \text{il existe } x \in A \text{ tel que } y = f(x)\}.$$

- L'image réciproque de B par f est un ensemble noté $f^{-1}(B)$. Elle est définie par

$$f^{-1}(B) = \{x \in E;\ f(x) \in B\}.$$

On a $f(\varnothing) = \varnothing$ et $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$.

Propriétés de l'image d'un ensemble par une application

Soient E et F deux ensembles. Soit $f : E \to F$ une application. Soient A et B deux parties de F. On a

- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
- $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

Propriétés de l'image : généralisation

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_k)_{k\in\{1,\ldots,n\}}$ une famille de parties de F. On a

- $f\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \bigcup_{k=1}^n f(A_k)$.
- $f\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) \subseteq \bigcap_{k=1}^n f(A_k)$.

▷ On considère l'application $f : \mathbb{R} \to [0, \infty[$ définie par $f(x) = \sqrt{|x|}$. On a $f([-4, 9]) = f([-4, 0[\cup[0, 9]) = f([-4, 0[) \cup f([0, 9]) =]0, 2] \cup [0, 3] = [0, 3]$.

Propriétés de l'image réciproque d'un ensemble par une application

Soient E et F deux ensembles. Soit $f : E \to F$ une application. Soient A et B deux parties de F. On a

- $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
- $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

Propriétés de l'image réciproque : généralisation

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_k)_{k\in\{1,\ldots,n\}}$ une famille de parties de F. On a

- $f^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(A_k)$.
- $f^{-1}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \bigcap_{k=1}^{n} f^{-1}(A_k)$.

On a également $f^{-1}\left(\overline{A}\right) = \overline{f^{-1}(A)}$.

▷ On considère l'application $f : \{1, 2, 3\} \to \{a, b, c, d\}$ définie par $f(1) = a$, $f(2) = c$ et $f(3) = d$. On a $f^{-1}(\{a, b\}) = f^{-1}(\{a\} \cup \{b\}) = f^{-1}(a) \cup f^{-1}(b) = \{1\} \cup \varnothing = \{1\}$.

Injectivité

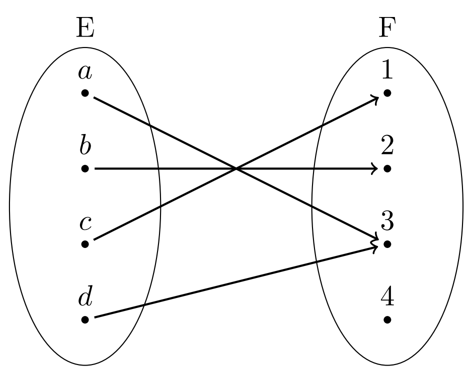
Soient E et F deux ensembles. Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est injective si, et seulement si, l'égalité $f(x) = f(y)$, avec $x \in E$ et $y \in E$, entraîne $x = y$.

▷ L'application $f : \mathbb{N} \to [0, \infty[$ définie par $f(x) = x^2$ est injective.

▷ L'application $f : \mathbb{R} \to [0, \infty[$ définie par $f(x) = x^2$ n'est pas injective. On a $f(1) = f(-1) = 1$ et $1 \neq -1$.

▷ L'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(x) = \frac{x}{2}$ si x est pair, et $f(x) = \frac{x+1}{2}$ si x est impaire n'est pas injective. On a $f(1) = f(2) = 1$ et $1 \neq 2$.

Le diagramme suivant illustre une application $f : E \to F$ qui n'est pas injective :



En effet, on a $f(a) = f(d) = 3$ et $a \neq d$.

Surjectivité

Soient E et F deux ensembles. Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est surjective si, et seulement si, on a $f(E) = F$.

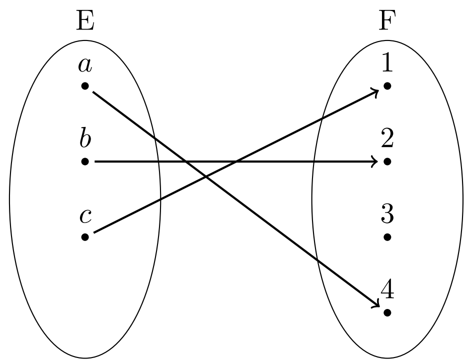
Autrement dit, f est surjective si, et seulement si, pour tout $y \in F$, il existe au moins un $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

▷ L'application $f : \mathbb{R} \to [0, \infty[$ définie par $f(x) = x^2$ est surjective.

▷ L'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(x) = 2x$ n'est pas surjective. Par exemple, il n'existe pas de $x \in \mathbb{N}$ tel que $f(x) = 1$.

▷ L'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(x) = \frac{x}{2}$ si x est pair, et $f(x) = \frac{x+1}{2}$ si x est impaire, est surjective.

Le diagramme suivant illustre une application $f : E \to F$ qui n'est pas surjective :



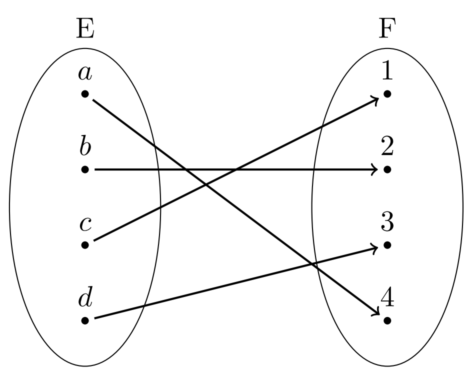
En effet, pour $y = 3$, il n'existe pas de $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

Bijectivité et application réciproque

> Soient E et F deux ensembles. Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est bijective si, et seulement si, elle est injective et surjective.

Les fonctions logarithmique et exponentielle sont bijectives sur leurs ensembles de définition.

Le diagramme suivant illustre une application $f : E \to F$ bijective :



Soient E et F deux ensembles. Soit $f : E \to F$ une application bijective. On appelle application réciproque de f l'application $f^{-1} : F \to E$ telle que, pour tout $x \in E$, on a

$$f^{-1}(f(x)) = x.$$

▷ L'application $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(x)$ est bijective. Son application réciproque est l'application $f^{-1} : \mathbb{R} \to [0, \infty[$ définie par $f^{-1}(x) = e^x$.

▷ L'application $f : [0, \infty[\to [0, \infty[$ définie par $f(x) = x^2$ est bijective. Son application réciproque est l'application $f^{-1} : [0, \infty[\to [0, \infty[$ définie par $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Parité d'une fonction

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est paire si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(-x) = f(x).$$

▷ La fonction $f : \mathbb{R} \to [0, \infty[$ définie par $f(x) = x^2$ est paire.

▷ La fonction $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ définie par $f(x) = \cos(x)$ est paire.

▷ La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{e^x}{(1 + e^x)^2}$ est paire. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(-x) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} \times \frac{e^{2x}}{e^{2x}} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} = f(x).$$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est impaire si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(-x) = -f(x).$$

▷ La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$ est impaire.

▷ La fonction $f : \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \tan(x)$ est impaire (on rappelle que $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$).

2 Calcul de sommes et de produits

2.1 Fondamentaux

Somme et produit

Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une suite de réels. Soient $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{Z}$ tel que $m \leq n$.

- On pose
$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_{n-1} + a_n.$$
- On pose
$$\prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \times a_{m+1} \times \ldots \times a_{n-1} \times a_n.$$

L'indice k est une variable "muette" qui n'a aucune signification en dehors du symbole $\sum$ ou $\prod$. On peut lui substituer n'importe quelle autre variable qui n'a pas été utilisée.

Ainsi $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{i=m}^{n} a_i = \ldots$.

Illustration avec les fonctions logarithmique et exponentielles

Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une suite de réels. Soient $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{Z}$ tel que $m \leq n$. Par les propriétés des fonctions logarithmiques et exponentielles, sous réserve d'existence, on a

- $\displaystyle \ln\left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right) = \sum_{k=m}^{n} \ln(a_k)$,
- $\displaystyle e^{\sum\limits_{k=m}^{n} a_k} = \prod_{k=m}^{n} e^{a_k}$.

Propriétés élémentaires de la somme

Soient $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ deux suites de réels. Soient $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{Z}$ tel que $m \leq n$.

- Pour tout $p \in \{m, \ldots, n\}$, on a
$$\sum_{k=m}^{p} a_k + \sum_{k=p+1}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n} a_k.$$

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a
$$\sum_{k=m}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=m}^{n} a_k.$$
- On a
$$\sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k.$$

Propriétés élémentaires du produit

Soient $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une suite de réels. Soient $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{Z}$ tel que $m \leq n$.

- Pour tout $p \in \{m, \ldots, n\}$, on a
$$\left(\prod_{k=m}^{p} a_k\right) \times \left(\prod_{k=p+1}^{n} a_k\right) = \prod_{k=m}^{n} a_k.$$
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a
$$\prod_{k=m}^{n} \lambda a_k = \lambda^{n-m+1} \prod_{k=m}^{n} a_k.$$

Factorielle n

Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle factorielle n l'entier
$$n! = \prod_{k=1}^{n} k.$$

Autrement écrit, $n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1$.

On adopte la convention $0! = 1$.

Le factorielle n vérifie la relation de récurrence $n! = n \times (n-1)!$.

▷ On a $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

Coefficient binomial

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \ldots, n\}$. On appelle coefficient binomial d'indices n et k l'entier
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

On adopte la convention, pour tout $k \notin \{0, \ldots, n\}$, $\binom{n}{k} = 0$.

▷ On a

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(3 \times 2 \times 1) \times (3 \times 2 \times 1)} = 20.$$

Le coefficient binomial d'indices n et k se prononce parfois "k parmi n". Il est parfois noté C_n^k.

En remarquant que $n! = (n-k)! \prod_{i=0}^{k-1}(n-i)$, on peut écrire

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1}(n-i).$$

Propriétés du coefficient binomial

Les propriétés suivantes sont vérifiées.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\binom{n}{1} = n.$$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, on a
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$
Cette égalité est appelée "propriété de symétrie".
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on a
$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}.$$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, on a
$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$
Cette égalité est appelée "formule du triangle de Pascal".

2.2 Formules de sommes finies

Formule de Vandermonde

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \{0, \ldots, n+m\}$, on a

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j}\binom{m}{k-j} = \binom{n+m}{k}.$$

▷ Par la formule de Vandermonde, on a

$$\sum_{j=0}^{3} \binom{2}{j}\binom{3}{3-j} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10.$$

Formule du binôme de Newton

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, on a

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

En inversant les variables x et y, on a également $(x+y)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$.

La formule du binôme de Newton est parfois utilisée pour calculer des sommes. Il faut donc la prendre sous la forme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = (x+y)^n$.

▷ On cherche à déterminer le coefficient du terme x^6 dans le développement du polynôme $(x+2)^8$. Par la formule du binôme de Newton, on a $(x+2)^8 = \displaystyle\sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} x^{8-k} 2^k$. Le coefficient du terme x^6 s'obtient quand $k = 2$. Par conséquent, ce coefficient est $\displaystyle\binom{8}{2} 2^2 = \frac{8!}{2!(8-2)!} \times 4 = 112$.

▷ On cherche à calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{3n} \binom{3n}{k}$. En utilisant la formule du binôme de Newton, on a

$$\sum_{k=0}^{3n} \binom{3n}{k} = \sum_{k=0}^{3n} \binom{3n}{k} 1^k 1^{3n-k} = (1+1)^{3n} = 2^{3n} = 8^n.$$

Somme des n premiers entiers, de leurs carrés, de leurs cubes

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

▷ On cherche à calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} k(1-k)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k(1-k) &= \sum_{k=1}^{n}(k-k^2) = \sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(3-(2n+1))}{6} = \frac{n(n+1)(2-2n)}{6} = -\frac{(n-1)n(n+1)}{3}.\end{aligned}$$

Somme des n premiers termes d'une suite géométrique

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, on a
$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x = 1$, on a
$$\sum_{k=0}^{n} x^k = n+1.$$

▷ On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = 2^{n+1} - 1.$

▷ Pour tout $x \in]-1,1[$, comme $\lim_{n\to\infty} x^{n+1} = 0$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}.$$

2.3 Formules de sommes infinies

Notations

Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels. Soit $m \in \mathbb{Z}$. On dit que $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ est convergente si, et seulement si, $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=m}^{n} a_k$ existe et est finie. Dans ce cas, on pose

$$\sum_{k=m}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=m}^{n} a_k.$$

Série de Riemann

Pour tout $\alpha > 0$, on appelle série de Riemann la série

$$S(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

Celle-ci converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

En particulier,

- la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge,
- la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge.

Somme infinie d'une suite géométrique et de ses dérivées

Pour tout $x \in]-1,1[$, on a

- $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$.
- $\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.
- $\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$.

Pour tout $x \in]-1,1[$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=0}^{\infty} (x^k)^{(p)} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(p)},$$

où, pour toute fonction f admettant une dérivée d'ordre p, $(f(x))^{(p)}$ désigne la dérivée p-ème de la fonction $f(x)$. On a donc

$$(x^k)^{(p)} = x^{k-p} \prod_{i=0}^{p-1} (k-i), \qquad \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(p)} = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}.$$

La notion de dérivée sera rappeler dans une section ultérieure.

▷ On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 5^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-5^{-1})^k = \frac{1}{1-(-5^{-1})} = \frac{1}{1+5^{-1}} = \frac{5}{6}$.

▷ On a $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)2^{2-k} = \frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} = 2^4 = 16$.

Formule du binôme négatif

Pour tout $r \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]-1,1[$, on a

$$\sum_{k=r}^{\infty} \binom{k}{r} x^{k-r} = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}.$$

▷ On a $\displaystyle\sum_{k=5}^{\infty} \binom{k}{5} 2^{5-k} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^6} = 2^6 = 64$.

Série exponentielle

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on appelle série exponentielle la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

▷ On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1}$.

▷ On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\ln 2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\ln 2)^k}{k!} = e^{-\ln 2} = e^{\ln(2^{-1})} = 2^{-1}$.

Série logarithmique

Pour tout $x \in]-1,1[$, on appelle série logarithmique la série

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} = \ln(1+x).$$

▷ On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k} = -\ln(2)$.

2.4 Somme d'une famille de réels

Notations

Soient $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ une suite de réels et $(r_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ une suite d'entiers relatifs. Soient $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$ tel que $m \leq n$ et $I = \{r_k;\ k \in \{m,\ldots,n\}\}$. On a

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{k=m}^{n} a_{r_k}.$$

En particulier,

- si $I = \{r_k;\ k \in \mathbb{N}\}$, alors on a $\displaystyle\sum_{i\in I} a_i = \sum_{k=0}^{\infty} a_{r_k}$.
- si $I = \{r_k;\ k \in \mathbb{Z}\}$, alors on a $\displaystyle\sum_{i\in I} a_i = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{r_k} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{r_k} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{r_{-k}}$.

Si, pour tout $k \in \{m,\ldots,n\}$ on a $r_{k+1} - r_k = 1$, alors il convient de poser $r_k = k$.

▷ Soient $a_1 = 1,3$, $a_2 = 2,2$ et $a_3 = 2,7$. On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} a_k = a_1 + a_2 + a_3 = 1,3 + 2,2 + 2,7 = 6,6$.

▷ Soit $I = \{\text{entiers impairs}\}$. On cherche à calculer $\displaystyle\sum_{i\in I} 5^{-i}$. On a $I = \{2k+1;\ k \in \mathbb{N}\}$. Il vient

$$\sum_{i\in I} 5^{-i} = \sum_{k=0}^{\infty} 5^{-(2k+1)} = 5^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\left(5^{-2}\right)^k = 5^{-1}\frac{1}{1-5^{-2}} = \frac{5}{24}.$$

Changement d'indices

Soit $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ une suite de réels. Soient $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{Z}$ tel que $m \leq n$. Pour tout $u \in \mathbb{Z}$, on a

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m-u}^{n-u} a_{k+u}.$$

Ainsi, on a $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{i\in I} a_i$, avec $I = \{k;\ k \in \{m, \ldots, n\}\} = \{k+u;\ k \in \{m-u, \ldots, n-u\}\}$.
Ci-dessous un exemple de changement d'indices très utile :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}.$$

▷ On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=9}^{n}(k-8)^3 = \sum_{k=1}^{n-8} k^3 = \left(\frac{(n-8)((n-8)+1)}{2}\right)^2 = \frac{(n-8)^2(n-7)^2}{4}.$$

▷ Soit $m \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in]-1, 1[$, on a

$$\sum_{k=-m}^{\infty} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k-m} = x^{-m}\sum_{k=0}^{\infty} x^k = x^{-m}\frac{1}{1-x} = \frac{1}{x^m(1-x)}.$$

Propriétés

Soit $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ une suite de réels. Soit $I \subseteq \mathbb{Z}$.

- Si, pour tout $i \in I$, on a $a_i \geq 0$, alors, pour tout $J \subseteq I$, on a

$$\sum_{i\in J} a_i \leq \sum_{i\in I} a_i.$$

- Soient $U \in \mathbb{Z}$ et $(J_u)_{u\in U}$ une famille de parties de I disjointes deux à deux. En posant $J = \bigcup_{u\in U} J_u$, on a

$$\sum_{i\in J} a_i = \sum_{u\in U}\left(\sum_{j\in J_u} a_j\right).$$

2.5 Somme double

Calculs de sommes doubles à indices non liés

Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2}$ une suite de réels. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}^*$ et $I = \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,p\}$. On a

$$\sum_{(i,j)\in I} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \right).$$

Si, pour tout $(i,j) \in I$, il existe deux réels b_i et c_j tels que $a_{i,j} = b_i c_j$, alors on a

$$\sum_{(i,j)\in I} a_{i,j} = \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \right) \left(\sum_{j=1}^{p} c_j \right).$$

▷ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} ij = \left(\sum_{i=1}^{n} i \right) \left(\sum_{j=1}^{n} j \right) = \left(\sum_{i=1}^{n} i \right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Calculs de sommes doubles à indices liés

Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2}$ une suite de réels. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $I = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2;\ 0 \leq j \leq i \leq n\}$. On a

$$\sum_{(i,j)\in I} a_{i,j} = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{i} a_{i,j} \right) = \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{i=j}^{n} a_{i,j} \right).$$

▷ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=j}^{n} 2^{i-j} &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} 2^{i-j} = \sum_{i=0}^{n} 2^i \sum_{j=0}^{i} 2^{-j} = \sum_{i=0}^{n} 2^i \times \frac{1-2^{-(i+1)}}{1-2^{-1}} \\ &= 2\sum_{i=0}^{n} 2^i - \sum_{i=0}^{n} 1 = 2 \times \frac{1-2^{n+1}}{1-2} - (n+1) = 2^{n+2} - n - 3. \end{aligned}$$

3 Calcul intégral

3.1 Dérivation

Dérivée d'une fonction

Soient $I \subseteq \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est dérivable en x_0 si, et seulement si, on a

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = t(x_0),$$

avec $t(x_0)$ fini. Si, pour tout $x \in I$, f est dérivable en x, alors la dérivée de f est la fonction $f' : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$f'(x) = t(x).$$

La dérivée d'une fonction f se note parfois $\frac{df}{dx}(x)$ (notation de Leibniz) ou $D_x f(x)$ (notation d'Euler).

Dérivées usuelles

Les dérivées qui suivent sont valables dans les domaines de définitions de chaque fonction.

$(c)' = 0$	$(\cos(x))' = -\sin(x)$
$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$, $(\alpha \in \mathbb{R})$	$(\tan(x))' = 1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$
$(e^x)' = e^x$	$(\mathrm{cotan}(x))' = -\dfrac{1 + \tan^2 x}{\tan^2(x)} = -\dfrac{1}{\sin^2(x)}$
$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$	$(\arcsin(x))' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$(a^x)' = a^x \ln(a)$, $(a > 0)$	$(\mathrm{arcos}(x))' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$(\sin(x))' = \cos(x)$	$(\arctan(x))' = \dfrac{1}{1 + x^2}$

Quelques dérivées usuelles de fonctions puissances sont confectionnées dans le tableau suivant :

$f(x)$	1	x	x^2	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^3}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$
$f'(x)$	0	1	$2x$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$-\frac{1}{x^2}$	$-\frac{2}{x^3}$	$-\frac{3}{x^4}$	$-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$

Opérations usuelles sur les dérivées

Soient $I \subseteq \mathbb{R}$ et $x \in I$. Soient $u : I \to \mathbb{R}$ et $v : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions. On suppose que u et v sont dérivable en x.

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$(\lambda u(x))' = \lambda u'(x).$$

- On a

$$(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x).$$

- On a

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

- On a

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

- On a

$$(u(v(x)))' = v'(x)u'(v(x)).$$

En complément, quelques formules moins générales sont présentées dans le tableau suivant :

$f(x)$	$\frac{1}{u(x)}$	$\sqrt{u(x)}$	$\ln u(x)$	$e^{u(x)}$	$\cos(u(x))$	$\sin(u(x))$
$f'(x)$	$-\frac{u'(x)}{u^2(x)}$	$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$u'(x)e^{u(x)}$	$-u'(x)\sin(u(x))$	$u'(x)\cos(u(x))$

▷ Pour tout $x > 0$, on a $(\cos(\sqrt{x}))' = -\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin(\sqrt{x})$.

▷ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $(x\arctan(x))' = \arctan(x) + \frac{x}{1+x^2}$.

▷ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $(\ln(1+x^2))' = \frac{2x}{1+x^2}$.

3.2 Primitive

Primitive d'une fonction réelle

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit qu'une fonction F est une primitive de f sur I si, et seulement si, pour tout $x \in I$, on a

$$F'(x) = f(x).$$

Une primitive de $f(x)$ se note $\int^x f(t)dt$ ou $\int f(t)dt$.

Propriétés des primitives

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et F une primitive de f sur I. Alors, pour tout $k \in \mathbb{R}$, la fonction $G = F + k$ est aussi une primitive de f.

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$. Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$, F une primitive de f sur I et G une primitive de g sur I. Alors, pour tout $\mu \in \mathbb{R}$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu F + \lambda G$ est une primitive de $\mu f + \lambda g$.

Primitives usuelles

Les primitives qui suivent sont valables dans les domaines de définitions de chaque fonction :

Si $\alpha \neq 1$, $\int^x t^\alpha dt = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\int^x \cos(t)dt = \sin(x)$
Si $\alpha \neq 0$, $\int^x e^{\alpha t} dt = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha}$	$\int^x \sin(t)dt = -\cos(x)$
$\int^x \frac{1}{t} dt = \ln(x)$	$\int^x \frac{1}{\cos^2(t)} dt = \tan(x)$
$\int^x \ln(t)dt = x\ln(x) - x$	$\int^x \frac{1}{\sin^2(t)} dt = -\operatorname{cotan}(x)$
$\int^x \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan(x)$	$\int^x \tan(t)dt = -\ln\left(\cos(x)\right)$
$\int^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \arcsin(x)$	$\int^x \operatorname{cotan}(t)dt = \ln\left(\sin(x)\right)$

On aurait pu ajouter à toutes ces primitives "$+k$" avec $k \in \mathbb{R}$.

Quelques formules sur les primitives de fonctions composées sont présentées dans le tableau suivant :

$f(x)$	$-\dfrac{u'(x)}{u^2(x)}$	$\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$u'(x)e^{u(x)}$	$u'(x)\sin u(x)$	$u'(x)\cos u(x)$
$\displaystyle\int^x f(t)dt$	$\dfrac{1}{u(x)}$	$2\sqrt{u(x)}$	$\ln(u(x))$	$e^{u(x)}$	$-\cos(u(x))$	$\sin(u(x))$

▷ On a $\displaystyle\int^x \frac{2t}{t^2+1}dt = \ln(x^2+1)$ (plus un réel k).

▷ On a $\displaystyle\int^x te^{\frac{t^2}{2}}dt = e^{\frac{x^2}{2}}$ (plus un réel k).

▷ On a $\displaystyle\int^x \cos(t)\sin^5(t)dt = \frac{\sin^6(x)}{6}$ (plus un réel k).

3.3 Intégrale simple

Calcul intégral et primitive

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$. Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et F une primitive de f sur $[a,b]$. On appelle intégrale de f sur $[a,b]$ le réel

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

On adopte la notation $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$. Ainsi, on a $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

▷ On a $\displaystyle\int_0^2 xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} = 2$.

▷ On a $\displaystyle\int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$.

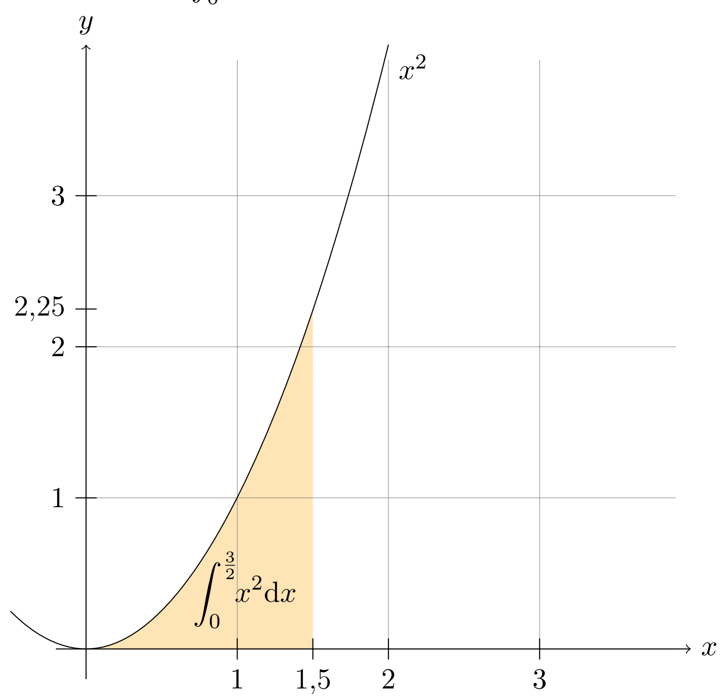
▷ On a $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = [\arctan(x)]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$.

Calcul d'aire et intégrale

Il y a un lien fort entre les intégrales et le calcul d'aire d'une région du plan. Un exemple est décrit ci-après. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$. Soit $f : [a,b] \to [0,\infty[$ une fonction continue.

Si on pose $\mathcal{S} = \{(x,y) \in [0,\infty[^2;\ a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$, alors l'aire de $\mathcal{S}$ est l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$.

La zone colorée du graphique suivant représente $\mathcal{S} = \left\{(x,y) \in [0,\infty[^2;\ 0 \leq x \leq \frac{3}{2},\ 0 \leq y \leq x^2\right\}$, dont l'aire est donnée par l'intégrale $\int_0^{\frac{3}{2}} x^2 dx$ (que l'on pourrait calculer) :



Propriétés fondamentales de l'intégrale

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$. Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues.

- On a $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.
- On a $\int_a^a f(x)dx = 0$.
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$.
- On a
$$\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$
- Pour tout $c \in]a,b[$, on a
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

  Cette égalité est appelée "relation de Chasles".

▷ On a

$$\begin{aligned}\int_1^2 (3x^2-2x+1)dx &= 3\int_1^2 x^2dx - 2\int_1^2 xdx + \int_1^2 dx = 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 - 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 + [x]_1^2 \\ &= 3\left(\frac{2^3}{3}-\frac{1^3}{3}\right) - 2\left(\frac{2^2}{2}-\frac{1^2}{2}\right) + (2-1) = 5.\end{aligned}$$

▷ On a

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x+x^3+1}{1+x^2}dx &= \int_0^1 \left(\frac{x+x^3}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^2}\right)dx = \int_0^1 \left(x+\frac{1}{1+x^2}\right)dx \\ &= \int_0^1 xdx + \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + [\arctan(x)]_0^1 = \frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Intégration par parties

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$. Soient $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $v : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables et de dérivées continues. On a

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx.$$

▷ On cherche à calculer $\int_0^1 xe^x dx$. On a $\int_0^1 xe^x dx = \int_0^1 u'(x)v(x)dx$ avec $u'(x) = e^x$ et $v(x) = x$. On considère $u(x) = e^x$ et $v'(x) = 1$. En faisant une intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^x dx &= \int_0^1 u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u(x)v'(x)dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx \\ &= e - 0 - [e^x]_0^1 = e - (e-1) = 1.\end{aligned}$$

▷ On cherche à calculer $\int_1^e x^2\ln(x)dx$. On a $\int_1^e x^2\ln(x)dx = \int_1^e u'(x)v(x)dx$, avec $u'(x) = x^2$ et $v(x) = \ln(x)$. On considère $u(x) = \frac{x^3}{3}$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$. Par une intégration par parties, il vient

$$\begin{aligned}I &= [u(x)v(x)]_1^e - \int_1^e u(x)v'(x)dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3}\times\frac{1}{x}dx \\ &= \left(\frac{e^3}{3}\ln(e) - \frac{1^3}{3}\ln(1)\right) - \frac{1}{3}\int_1^e x^2dx \\ &= \frac{e^3}{3} - 0 - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{e^3}{3}-\frac{1^3}{3}\right) = \frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9}.\end{aligned}$$

Changement de variable

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $u : \mathbb{R} \to [a,b]$ une fonction dérivable dont la dérivé est continue. On a

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(y)dy.$$

On dit alors que l'on a fait le changement de variable $y = u(x)$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Ainsi, on remplace $u(x)$ par y dans l'intégrale de départ, ce qui entraîne $dy = u'(x)dx$ et on détermine les bornes d'intégration pour y, *i.e.* $u(a)$ et $u(b)$.

Si on arrive à déterminer une primitive F de f, alors on a

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)dx = [F(u(x))]_a^b = F(u(b)) - F(u(a)).$$

▷ On cherche à calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx$. En faisant le changement de variable $y = \sqrt{x}$, avec $x = 1$ implique $y = 1$, $x = 2$ implique $y = \sqrt{2}$, et $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, il vient

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx &= \int_1^2 \frac{2}{\sqrt{x}+1}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx = 2\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{y+1}dy = 2\left[\ln(y+1)\right]_1^{\sqrt{2}} \\ &= 2(\ln(\sqrt{2}+1) - \ln(2)) = 2\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right).\end{aligned}$$

▷ On cherche à calculer $\displaystyle\int_0^1 e^x\cos(e^x)dx$. On peut poser $\displaystyle\int_0^1 e^x\cos(e^x)dx = \int_0^1 f(u(x))u'(x)dx$, avec $f(x) = \cos(x)$ et $u(x) = e^x$. Une primitive de f est $F(x) = \sin(x)$. Par conséquent, on a

$$\int_0^1 e^x\cos(e^x)dx = [\sin(e^x)]_0^1 = \sin(e) - \sin(1).$$

3.4 Compléments sur l'intégrale simple

Propriétés de l'intégrale d'une fonction positive

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue positive.

- On a
$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$
- Pour tout $c \in [a, b]$ et tout $d \in [a, b]$ tel que $c \leq d$, on a
$$\int_c^d f(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx.$$

Intégrale nulle

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue positive ou négative. On a $\int_a^b f(x)dx = 0$ si, et seulement si, $f(x) = 0$, $x \in [a, b]$.

Majoration et minoration de l'intégrale

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$. Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues.

- On a
$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq (b - a) \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$
- On a
$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}.$$
  Cette inégalité est appelée "inégalité de Cauchy-Schwarz".
- Si, pour tout $x \in [a, b]$, il existe un réel $m > 0$ tel que $f(x) \geq m$, alors on a
$$\int_a^b f(x)dx \geq m(b - a).$$

Intégrale sur un intervalle centrée en 0 : cas particuliers

Soit $a \in]0, \infty[$. Soit $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

- Si f est paire, alors on a
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$
- Si f est impaire, alors on a
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

▷ On cherche à calculer $\int_{-1}^{1} |x|e^{\frac{x^2}{2}}dx$. Comme la fonction $f(x) = |x|e^{\frac{x^2}{2}}$, $x \in [-1, 1]$, est paire, on a
$$\int_{-1}^{1} |x|e^{\frac{x^2}{2}}dx = 2\int_{0}^{1} xe^{\frac{x^2}{2}}dx = 2\left[e^{\frac{x^2}{2}}\right]_0^1 = 2(e^{\frac{1}{2}} - 1).$$

▷ On cherche à calculer $\int_{-1}^{1} xe^{|x|}\ln(1 + |x|)dx$. Comme la fonction $f(x) = xe^{|x|}\ln(1 + |x|)$, $x \in [-1, 1]$, est impaire, on a $\int_{-1}^{1} xe^{|x|}\ln(1 + |x|)dx = 0$.

Somme de Riemann

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle somme de Riemann de f associée à une subdivision de pas $\frac{b-a}{n}$ de l'intervalle $[a, b]$ la somme
$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$
Une somme de Riemann vérifie la convergence :
$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

▷ On cherche à calculer $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut poser $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, avec $f(x) = x^2$.

Comme f est continue sur $[0,1]$, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ est une somme de Riemann de f associée à une subdivision de pas $\frac{1}{n}$ de l'intervalle $[0,1]$. Il vient

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Fonctions continues par morceaux

La plupart des définitions et propriétés précédentes peuvent être étendues à des fonctions dites continues par morceaux. Nous donnons cette définition à titre informatif.

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est continue par morceaux si, et seulement si, pour tout intervalle fermé borné $[a,b] \subseteq I$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$,

- f est continue sur $[a,b]$ sauf au plus en un nombre fini de points,
- f admet une limite à gauche et à droite en chaque point de $[a,b]$.

3.5 Intégrale généralisée

Dans tout ce qui suit, on peut remplacer "continue" par "continue par morceau".

Intégrale généralisée en ∞

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $f : [a,\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. On dit que l'intégrale $\int_a^{\infty} f(x)dx$ est convergente si, et seulement si, $\lim_{\ell\to\infty}\int_a^{\ell} f(x)dx$ existe et est finie. Dans ce cas, on pose

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{\ell\to\infty}\int_a^{\ell} f(x)dx.$$

▷ On cherche à calculer $\int_0^{\infty} e^{-x}dx$. On a, pour tout $\ell > 0$, $\int_0^{\ell} e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_0^{\ell} = 1 - e^{-\ell}$. Par conséquent, on a

$$\int_0^{\infty} e^{-x}dx = \lim_{\ell\to\infty}\int_0^{\ell} e^{-x}dx = \lim_{\ell\to\infty}(1-e^{-\ell}) = 1.$$

▷ On cherche à savoir si l'intégrale $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx$ converge. On a, pour tout $\ell > 0$, $\int_0^{\ell} \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx = \left[2\sqrt{x+1}\right]_0^{\ell} = 2\sqrt{\ell+1} - 2$. Par conséquent, on a

$$\lim_{\ell\to\infty} \int_0^{\ell} \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx = \lim_{\ell\to\infty} (2\sqrt{\ell+1} - 2) = \infty.$$

Donc l'intégrale n'est pas convergente ; elle diverge.

Intégrale généralisée en $-\infty$

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $f :]-\infty, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On dit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ est convergente si, et seulement si, $\lim_{\ell\to-\infty} \int_{\ell}^{b} f(x)dx$ existe et est finie. Dans ce cas, on pose

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{\ell\to-\infty} \int_{\ell}^{b} f(x)dx.$$

▷ On cherche à calculer $\int_{-\infty}^{1} e^x dx$. On a, pour tout $\ell < 1$, $\int_{\ell}^{1} e^x dx = [e^x]_{\ell}^{1} = e - e^{\ell}$. Il vient

$$\int_{-\infty}^{1} e^x dx = \lim_{\ell\to-\infty} \int_{\ell}^{1} e^x dx = \lim_{\ell\to-\infty} (e - e^{\ell}) = e.$$

Intégrale généralisée en $-\infty$ et ∞

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On a, pour tout $c \in \mathbb{R}$, sous réserve de convergence,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx.$$

Intégrale généralisée en un point

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$. Soit $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{x\to a} |f(x)| = \infty$. On dit que l'intégrale $\int_{a}^{b} f(x)dx$ est convergente si, et seulement si, $\lim_{\ell\to a} \int_{\ell}^{b} f(x)dx$ existe et est finie. Dans ce cas, on pose

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\ell\to a} \int_{\ell}^{b} f(x)dx.$$

▷ On cherche à calculer $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$. Pout tout $a \in]0,1]$, on a $\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \left[2\sqrt{x}\right]_a^1 = 2 - 2\sqrt{a}$. Par conséquent, on a

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{a\to 0} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{a\to 0}(2 - 2\sqrt{a}) = 2.$$

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$. Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{x\to b} |f(x)| = \infty$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est convergente si, et seulement si, $\lim_{\ell\to b} \int_a^\ell f(x)dx$ existe et est finie. Dans ce cas, on pose

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\ell\to b} \int_a^\ell f(x)dx.$$

▷ On cherche à calculer $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}dx$. Pout tout $b \in [0, 2[$, on a $\int_0^b \frac{1}{\sqrt{2-x}}dx = \left[-2\sqrt{2-x}\right]_0^b = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2-b}$. D'où

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}dx = \lim_{b\to 2} \int_0^b \frac{1}{\sqrt{2-t}}dt = \lim_{b\to 2}(2\sqrt{2} - 2\sqrt{2-b}) = 2\sqrt{2}.$$

Intégrale généralisée et symétries d'une fonction

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

- Si f est paire, sous réserve de convergence, on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\int_0^{\infty} f(x)dx.$$

- Si f est impaire, sous réserve de convergence, on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 0.$$

▷ En admettant que l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^{20}}dx$ converge, comme la fonction $f(x) = \frac{x}{1+x^{20}}$, $x \in \mathbb{R}$, est impaire, on a $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^{20}}dx = 0$.

Soit $a \in]0, \infty[$. Soit $f :]-a, a[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{x \to a} |f(x)| = \infty$ et $\lim_{x \to -a} |f(x)| = \infty$.

∘ Si f est paire, sous réserve de convergence, on a

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

∘ Si f est impaire, sous réserve de convergence, on a

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

▷ On cherche à calculer $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-|x|}}dx$. En admettant que cette intégrale converge, comme la fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-|x|}}$, $x \in]-1, 1[$, est paire, il vient

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-|x|}}dx &= 2\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx = 2\lim_{\ell \to 1} \int_{0}^{\ell} \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx \\ &= 2\lim_{\ell \to 1} \left[-2\sqrt{1-x}\right]_{0}^{\ell} = 4\lim_{\ell \to 1}(1-\sqrt{1-\ell}) = 4. \end{aligned}$$

▷ En admettant que l'intégrale $\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-|x|}}dx$ converge, comme la fonction $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-|x|}}$, $x \in]-1, 1[$, est impaire, on a $\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-|x|}}dx = 0$.

3.6 Convergence des intégrales de références

Intégrales de Riemann

∘ L'intégrale

$$I(\alpha) = \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}dx$$

converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

∘ L'intégrale

$$J(\beta) = \int_{0}^{1} \frac{1}{x^{\beta}}dx$$

converge si, et seulement si, $\beta < 1$.

- Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$, l'intégrale

$$K(\alpha, \beta) = \int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha (b-x)^\beta} dx$$

converge si, et seulement si, $\alpha < 1$ et $\beta < 1$.

Intégrales de Bertrand

- L'intégrale

$$U(\alpha, \beta) = \int_2^\infty \frac{1}{x^\alpha (\ln(x))^\beta} dx$$

converge si, et seulement si, $\alpha > 1$, ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

- L'intégrale

$$V(\alpha, \beta) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^\alpha (\ln(x))^\beta} dx$$

converge si, et seulement si, $\alpha < 1$, ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Cas particulier : $\displaystyle\int_0^1 \ln(x) dx = -1$.

Intégrale de fonctions polyno-exponentielles

Pour tout $\alpha \geq 0$ et tout $\beta > 0$, l'intégrale

$$\Upsilon(\alpha, \beta) = \int_0^\infty x^\alpha e^{-x^\beta} dx$$

converge.

Index