TD n° 0 : Outils mathématiques

Ensembles et dénombrement

Exercice 1. Soient $E = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, et A, B, C et D quatre parties de E définies par $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{4,5,6,7\}$, $C = \{1,3,5,7\}$ et $D = \{2,3,4,5,6\}$. Calculer

$$(A \cap B) \cup (C \cap D), \qquad (A \cup C) \cap (B \cup D), \qquad \overline{(\overline{A} \cap D)} \cap \overline{(B \cup C)}.$$

Exercice 2. Soient $A = \{\text{entiers impairs}\}$ une partie de $\mathbb{N}$, et $B = [1,9[$ et $C = \{4\}$ deux parties de $\mathbb{R}$. Calculer

$$A \cap B, \qquad B \cap C, \qquad A \cap C, \qquad \overline{A}, \qquad \overline{A \cup \overline{B}}.$$

Exercice 3. Soient $A = \{1,2,3,4\}$ et $B = \{1,4,6\}$. Calculer $\mathrm{Card}(A \cup B)$:

1. directement.
2. en utilisant la formule du crible (à l'ordre 2) :

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B).$$

Exercice 4. Une association de consommateurs note un produit selon 3 critères :

- *Facilité d'utilisation :* bonne, moyenne, mauvaise,
- *Prix :* cher, pas cher,
- *Coût de maintenance :* cher, moyen, pas cher.

Combien y a t-il de possibilités de classement pour un produit ?

Exercice 5. Un code secret se compose de deux symboles : le premier doit être choisi dans la grille A et le deuxième, dans la grille B :

Grille A

$\clubsuit$	$\diamondsuit$	$\spadesuit$	$\heartsuit$	$\square$
$\lozenge$	$\blacklozenge$	$\eth$	$\bigstar$	$\mho$

Grille B

$\boxminus$	$\ominus$	$\circledast$	$\circledcirc$

Combien y-a-t'il de codes différents ?

Exercice 6. Un disque compact comprenant 10 morceaux est introduit dans un lecteur disposant de la touche Random Play. Celle-ci permet d'écouter une et une seule fois chacun des 10 morceaux du disque dans un ordre aléatoire. Après appui sur cette touche, combien y a-t-il d'enchaînements distincts possibles ?

Exercice 7. Un questionnaire contient 5 questions, dont chacune a deux réponses possibles : Oui ou Non. Combien y a-t-il de façons pour compléter ce questionnaire en ayant au moins un Oui.

Exercice 8. On considère l'ensemble $E = \{a, b, c, d\}$.

1. Déterminer le nombre de combinaisons de 3 éléments de E.
2. Déterminer le nombre d'arrangements de 3 éléments de E.
3. Écrire méthodiquement :
   - les combinaisons de 3 éléments de E,
   - les arrangements de 3 éléments de E.

   Retrouver les résultats des questions 1 et 2.

Exercice 9. On considère deux classes, la première avec m étudiants, et la seconde avec n étudiants. De ce groupe de $m + n$ étudiants, une paire d'étudiants doit être sélectionnée (l'ordre n'est pas pris en compte).

1. Combien y a-t-il de choix possibles ?
2. Combien y a-t-il de choix possibles si les deux étudiants viennent de la première classe ?
3. Combien y a-t-il de choix possibles si les deux étudiants viennent de la seconde classe ?
4. Combien y a-t-il de choix possibles si la paire comprend un étudiant de chaque classe ?
5. Écrire une identité combinatoire reliant les réponses aux quatre parties précédentes.

Exercice 10. Les garnitures disponibles pour faire une pizza sont de 4 types de viande, 4 types de légumes et 3 types de fromage. Combien de façons y a-t-il pour créer une pizza ayant 2 viandes, un légume et un fromage ?

Exercice 11. On considère les deux grilles suivantes :

Grille A

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20

Grille B

a	b	c	d	e

Déterminer le nombre de façons possibles de cocher 8 cases dans la grille A et une case dans la grille B.

Calculs

Exercice 12. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$,

$$\frac{n!}{\prod_{k=1}^{n} k^2} = \frac{1}{n!}, \qquad \frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}, \qquad \frac{n^2}{n!} = \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}.$$

Exercice 13. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

Exercice 14. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}, \qquad T_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k.$$

Que remarque t'on ?

Exercice 15.

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\binom{k}{2} = \frac{1}{2}\left(k^2 - k\right).$$

2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{2} = \frac{n(n+1)(n-1)}{6}.$$

Exercice 16. Soit $I = \{\text{entiers impairs}\}$. Montrer que

$$\sum_{i \in I} 5^{-i} = 5^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(5^{-2}\right)^k = \frac{5}{24}.$$

Exercice 17. Montrer que, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k = x^2 \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) x^{k-2} + x \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}.$$

Exercice 18. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!}.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$S_n = \frac{2^n}{n!}.$$

2. En déduire la valeur de $S = \sum_{n=0}^{\infty} S_n$.

Exercice 19. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,
$$\sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{\lambda}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda^2 e^{\lambda}.$$

Exercice 20. Soit $I = \{\text{entiers relatifs pairs}\}$. Montrer que, pour tout $q \in \mathbb{R}^*$,
$$\sum_{i \in I} \frac{q^i}{\left|\frac{i}{2}\right|!} = e^{q^2} + e^{\frac{1}{q^2}} - 1.$$

Exercice 21.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{nx-(n+1)}{(1-x)^2}x^n.$$

2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}.$$

Exercice 22. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1} = n(1+x)^{n-1}.$$