TD n° 1 : Espaces probabilisés - Probabilités

Exercice 1. On choisit successivement 3 personnes dans une population. Pour tout $k \in \{1,2,3\}$, on considère l'événement P_k= "la k-ème personne a un rhésus positif". Exprimer, en fonction des $(P_k)_{k\in\{1,2,3\}}$, les événements suivants :

1. A= "les 3 personnes ont un rhésus positif",
2. B= "une personne exactement a un rhésus positif",
3. C= "au moins une personne a un rhésus positif" (on pourra utiliser l'expression de $\overline{C}$),
4. D= "au moins 2 personnes ont un rhésus négatif".

Exercice 2. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et A et B deux événements tels que

$$\mathbb{P}(A) = 0,6, \qquad \mathbb{P}(B) = 0,3, \qquad \mathbb{P}(A \cap B) = 0,1.$$

1. Quelle est la probabilité que A et B se réalisent ?
2. Calculer la probabilité que A ou B se réalise.
3. Calculer la probabilité que ni A, ni B ne se réalisent.

Exercice 3. Une entreprise fabrique des appareils électroniques. La probabilité qu'un appareil fonctionne est $0,9$. Calculer la probabilité qu'un appareil prélevé au hasard dans le stock de l'entreprise ne fonctionne pas.

Exercice 4. On considère un jeu de fléchettes sur une cible comportant 3 zones : zone 1, zone 2 et zone 3. On lance une fléchette sur la cible. Un univers associé à cette expérience aléatoire est $\Omega = \{\text{zone } 1, \text{ zone } 2, \text{ zone } 3\}$. Pour tout $k \in \{1,2,3\}$, on considère les événements A_k= "la fléchette atteint la zone k"=$\{\text{zone } k\}$. Soit $\mathbb{P}$ une probabilité définie sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle qu'il existe un réel c vérifiant, pour tout $k \in \{1,2,3\}$,

$$\mathbb{P}(A_k) = ck.$$

1. Montrer que $(A_k)_{k\in\{1,2,3\}}$ forme un système complet d'événements.
2. Déterminer l'unique valeur possible pour c.

Exercice 5. Soient A, B et C trois événements tels que $A \cup B \cup C = \Omega$ et

$$\mathbb{P}(B) = 2\mathbb{P}(A), \qquad \mathbb{P}(C) = 3\mathbb{P}(A).$$

Montrer que

$$\mathbb{P}(A) \geq \frac{1}{6}.$$

Exercice 6. On considère les deux grilles suivantes :

Grille A

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20

Grille B

a	b	c	d	e
f	g	h	i	j

Un jeu consiste à cocher 8 cases dans la grille A et 3 cases dans la grille B. Un tirage au sort détermine l'unique combinaison gagnante. Calculer la probabilité de gagner.

Exercice 7. Une entreprise fabrique et conditionne 20 appareils par jour. Parmi ceux-ci, 3 sont défectueux. Dans une journée, un vérificateur extrait sans remise 5 appareils à 5 heures différentes pour inspection. Calculer la probabilité que le vérificateur détecte exactement 2 produits défectueux.

Exercice 8. Combien de personnes faut-il pour que la probabilité qu'au moins deux d'entre elles aient leur anniversaire le même mois soit au moins $0,5$? On admet que tous les mois sont équiprobables.

Exercice 9. Une urne contient 9 boules numérotées de 1 à 9. On tire 2 boules. Déterminer la probabilité d'obtenir 2 boules portant des numéros de même parité dans les trois cas suivants :

1. On tire les 2 boules simultanément.
2. On tire une boule, on ne la remet pas, puis on tire la deuxième boule.
3. On tire une boule, on la remet avant de tirer la deuxième boule.

Exercice 10. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. On considère l'application $\mathbb{Q} : \mathcal{P}(\{0,\ldots,n\}) \to \mathbb{R}$ définie par

$$\mathbb{Q}(\{k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k \in \{0,\ldots,n\}$$

et vérifiant : pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{Q}(A) = \sum_{k\in A} \mathbb{Q}(\{k\})$.

Montrer que $\mathbb{Q}$ est une probabilité sur $(\{0,\ldots,n\}, \mathcal{P}(\{0,\ldots,n\}))$.

Exercice 11. Soit $\lambda > 0$. On considère l'application $\mathbb{Q} : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ définie par

$$\mathbb{Q}(\{k\}) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \qquad k \in \mathbb{N}$$

et vérifiant : pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mathbb{Q}(A) = \sum_{k\in A} \mathbb{Q}(\{k\})$.

1. Montrer que $\mathbb{Q}$ est une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.
2. Soit $A = \{\text{entiers pairs}\}$. Montrer que $\mathbb{Q}(A) = \frac{1}{2}(1+e^{-2\lambda})$.