

TD n° 2 : Probabilités conditionnelles - Indépendance

Exercice 1. AneiaStar est une entreprise spécialisée dans l'élaboration, l'emballage et la commercialisation de condiments, épices, infusions et édulcorants. Elle dispose de machines pour effectuer le conditionnement et l'emballage dans des pots en plastique, et organise des contrôles pour garantir la qualité de ses produits. On admet que

- 3% des pots de la production présentent un défaut,
- sachant qu'un pot a un défaut, il y a 94% de chances qu'il soit refusé au contrôle,
- sachant qu'un pot n'a pas de défaut, il y a 92% de chances qu'il soit accepté au contrôle.

On prélève au hasard un pot dans le lot. On considère les événements $D = \text{"le pot a un défaut"}$ et $A = \text{"le pot est accepté à l'issue du contrôle"}$.

1. Donner, sans calcul, les valeurs de $\mathbb{P}(D)$, $\mathbb{P}_D(\overline{A})$ et $\mathbb{P}_{\overline{D}}(A)$.
2. Calculer $\mathbb{P}_D(A)$.
3. Montrer que

$$\mathbb{P}(A \cap D) = 0,0018, \quad \mathbb{P}(A \cap \overline{D}) = 0,8924.$$

4. En utilisant le résultat de la question 3, déterminer $\mathbb{P}(A)$.
5. Calculer la probabilité qu'un pot présente un défaut sachant qu'il a été accepté au contrôle.

Exercice 2. Sur une machine, deux types de pannes sont possibles : la panne d'origine mécanique et la panne d'origine électronique. Un jour donné, la probabilité qu'une panne mécanique survienne est 0,005 et la probabilité qu'une panne électronique survienne est 0,003. D'autre part la probabilité qu'une panne mécanique apparaisse sachant qu'une panne électronique a déjà eu lieu est 0,02.

1. Calculer la probabilité que la machine ait les deux types de panne un jour donné.
2. Calculer la probabilité que la machine n'ait aucune panne un jour donné.

Exercice 3. Un avion est porté disparu dans une zone à végétation dense. Cette zone est divisée en 3 régions : région 1, région 2 et région 3. On pense que l'accident a pu arriver dans n'importe laquelle de ces 3 régions. Une équipe de professionnels entame les recherches. Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, la probabilité que l'équipe ne découvre pas l'avion dans la région i sachant qu'il se trouve bien dans la région i est α_i . Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, calculer la probabilité que l'avion se trouve dans la région i sachant que les recherches dans la région 1 n'ont rien donné.

Exercice 4. Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et A et B deux événements. On suppose que $\mathbb{P}(\overline{B}) \neq 0$. Montrer que

$$\mathbb{P}_{\overline{B}}(\overline{A}) = 1 - \frac{\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)}{1 - \mathbb{P}(B)}.$$

Exercice 5. Soient A et B deux événements avec $\mathbb{P}(A \cup B) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$.

1. Montrer que $(\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B))(\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)) \geq 0$, puis

$$\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(A \cap B)\mathbb{P}(A \cup B).$$

2. En déduire que

$$\mathbb{P}_{A \cup B}(A) \geq \mathbb{P}_B(A).$$

Exercice 6. Soient $\lambda > 0$, $p \in]0, 1[$, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements et $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système complet d'événements tels que

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}(B_n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$.
- pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \{0, \dots, n\}$, on a $\mathbb{P}_{B_n}(A_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}(A_k) = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!}.$$

Exercice 7. Une urne contient 13 boules dont 6 noires, 3 blanches et 4 rouges. On tire 4 boules au hasard et simultanément. On considère les événements $A =$ "on obtient 2 boules blanches" et $B =$ "on obtient 2 boules rouges". Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé adapté à notre expérience aléatoire ($\mathbb{P}$ désigne la probabilité uniforme).

1. Calculer $\mathbb{P}(A)$.
2. Calculer $\mathbb{P}_B(A)$.
3. Est-ce que les événements A et B sont indépendants ?

Exercice 8. Une usine fabrique des objets d'un certain type. Chacun d'entre eux est constitué de deux éléments a et b . On tire au hasard l'un des objets dans la production. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé adapté à cette expérience aléatoire. On considère les événements $A =$ "l'élément a de l'objet présente un défaut de fabrication" et $B =$ "l'élément b de l'objet présente un défaut de fabrication". On suppose que A et B sont indépendants, et $\mathbb{P}(A) = 0,1$ et $\mathbb{P}(B) = 0,2$.

1. Dire, en une phrase, ce que représente $\mathbb{P}(A \cap B)$. Calculer $\mathbb{P}(A \cap B)$.
2. Dire, en une phrase, ce que représente $\mathbb{P}(A \cup B)$. Calculer $\mathbb{P}(A \cup B)$.

Exercice 9. Un appareil est composé de trois dispositifs. On suppose que chaque dispositif fonctionne indépendamment des autres et que la probabilité que le premier fonctionne est 0,2, la probabilité que deuxième fonctionne est 0,1, et la probabilité que troisième fonctionne est 0,7. Quelle est la probabilité pour qu'exactly 2 dispositifs fonctionnent ?

Exercice 10. Au cours d'une conversation, on apprend qu'un individu a deux enfants dont au moins une fille. Quelle est la probabilité pour qu'il ait deux filles ? (*on admet qu'une femme enceinte a une chance sur deux d'avoir une fille*).