TD n° 3 : *Var* discrètes

Exercice 1. Soit X une *var* discrète. On sait qu'il existe un réel a tel que la loi de X est donnée par

k	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	a	a

1. Déterminer l'unique valeur possible pour a.
2. Calculer $\mathbb{P}(1 \leq X \leq 3)$, $\mathbb{P}(X \geq 2)$ et $\mathbb{P}_{\{X \geq 2\}}(X = 4)$.
3. Calculer $\mathbb{P}(X \neq 4)$ et $\mathbb{P}_{\{X \neq 4\}}(X = 2)$.

Exercice 2.

1. Soient $p \in]0, 1[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et X une *var* suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$:
$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k \in \{0, \ldots, n\}.$$
On pose $Y = n - X$. Montrer que Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, q)$ avec $q = 1 - p$.
2. Dans une exploitation agricole, 100 bovins se répartissent au hasard et indépendamment les uns des autres dans 3 étables : étable 1, étable 2 et étable 3. On suppose que chaque étable peut abriter la totalité du troupeau. Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, soit X_i la *var* égale au nombre de bovins ayant choisi l'étable i.
   (a) Déterminer, pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, la loi de X_i.
   (b) Que vaut $X_1 + X_2 + X_3$? En déduire la loi de la *var* $Z = X_1 + X_2$.

Exercice 3. Une rivière comporte une population d'écrevisses. Un écologiste réalise une expérience en disposant tous les 20 mètres une nasse à écrevisses. Il en place ainsi 25 et les numérote de 1 à 25. Lorsqu'on relève une nasse dans cette rivière, il n'y a que 15% de chances qu'elle soit vide. Soit X la *var* égale au nombre de nasses vides relevées par l'écologiste.

1. Déterminer la loi de X. Donner, sans démonstration, l'espérance et la variance de X.
2. Déterminer la probabilité de relever exactement 3 nasses vides.

Exercice 4. Soit X une *var* admettant un moment d'ordre 2. Montrer que, pour tout $c \in \mathbb{R}$,
$$\mathbb{V}(X) \leq \mathbb{E}((X - c)^2).$$

Exercice 5. Soient $p \in]0, 1[$ et X une *var* suivant la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1 - p)$:
$$\mathbb{P}(X = 0) = p, \qquad \mathbb{P}(X = 1) = 1 - p.$$

1. Calculer $\mathbb{P}(X > 0)$, $\mathbb{P}(X \leq 1)$ et $\mathbb{P}(X(1-X) = 1)$.
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
3. Calculer $\mathbb{E}\left(1 + 2X\right)$ et $\mathbb{V}\left(1 + 2X\right)$.
4. Déterminer la loi de la *var* $Y = 1 - \sqrt{1 - X}$.
5. Calculer la fonction génératrice de X.

Exercice 6. Soient $p \in]0, 1[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et X une *var* suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k \in \{0, \ldots, n\}.$$

1. Vérifier que $\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k) = 1$.
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X(X-1))$ et $\mathbb{V}(X)$.
3. Calculer la fonction génératrice de X. Utiliser cette fonction pour retrouver les valeurs de $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Exercice 7. Soient $\lambda > 0$ et X une *var* suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

1. Vérifier que $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1$.
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X(X-1))$ et $\mathbb{V}(X)$.
3. Calculer la fonction génératrice de X. Utiliser cette fonction pour retrouver les valeurs de $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Exercice 8. Soient $\lambda \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et X une *var* dont la loi est donnée par

$$\mathbb{P}(X = k) = (\sin(\lambda))^2 (\cos(\lambda))^{2k}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

1. Soit $m \in \mathbb{N}$. Calculer $\mathbb{P}(X \geq m)$.
2. Déterminer la fonction génératrice de X.
3. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}((-1)^X)$.

Exercice 9. Soient $p \in]0, 1[$ et X une *var* suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$:

$$\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}, \qquad k \in \mathbb{N}^*.$$

Montrer que

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) = \ln\left(p^{\frac{p}{p-1}}\right).$$

On rappelle que, pour tout $x \in]-1, 1[$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.