

TD n° 4 : Couples de *var* discrètes

Exercice 1. Un supermarché vend, entre autres, des bananes et des clémentines. Soient X la *var* égale à la quantité hebdomadaire vendue de bananes, et Y la *var* égale à la quantité hebdomadaire vendue de clémentines. L'unité est la tonne. La loi du couple (X, Y) en Septembre et Novembre 2008 est présentée par le tableau ci-dessous :

$X \backslash Y$	0,5	0,7	0,9	1
1	0,1	0,1	0,15	0,05
2	0,1	0,2	0,25	0,05

1. Déterminer la loi de X .
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
3. Calculer $\mathbb{P}(Y = 0,9)$. Est-ce que X et Y sont indépendantes ?

Exercice 2. Soient $p \in]0, 1[$, et X et Y deux *var* suivant chacune la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$:

$$\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p, \quad \mathbb{P}(X = 1) = p.$$

On pose $q = \mathbb{P}(\{X = 1\} \cap \{Y = 1\})$ et on suppose que $q \in]0, 1[- \{p^2\}$.

1. Est-ce que X et Y sont indépendantes ?
2. Calculer $\mathbb{C}(X, Y)$.
3. Calculer $\mathbb{V}(X + Y)$.

Exercice 3. Soient $(p, q) \in]0, 1[^2$, et X et Y deux *var* indépendantes.

- X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$:

$$\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p, \quad \mathbb{P}(X = 1) = p.$$

- Y suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(q)$:

$$\mathbb{P}(Y = 0) = 1 - q, \quad \mathbb{P}(Y = 1) = q.$$

1. On pose $Z = XY$.
 - (a) Déterminer la loi de Z .
 - (b) Calculer $\mathbb{E}(Z)$ de deux manières différentes.
2. On pose $W = X + Y$.

- (a) Déterminer la loi de W .
- (b) Calculer $\mathbb{E}(W)$ de deux manières différentes.

Exercice 4. On dispose de 2 pièces de monnaie équilibrées identiques. On lance la première pièce n fois. Soit X la *var* égale aux nombre de Piles obtenus. On lance la deuxième pièce n fois. Soit Y la *var* égale aux nombre de Piles obtenus. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé adapté à cette expérience aléatoire.

1. Déterminer la loi de X . Est-ce que X et Y sont *iid* ?
2. Que représente $\mathbb{P}(X + Y = n)$? Calculer $\mathbb{P}(X + Y = n)$ (on utilisera la formule de Vandermonde : pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ et tout $k \in \{0, \dots, n+m\}$, on a $\sum_{j=0}^k \binom{n}{j} \binom{m}{k-j} = \binom{n+m}{k}$).
3. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.
4. En utilisant le fait que $\mathbb{P}(Y \geq X) = \mathbb{P}(X \geq Y)$ et le résultat de la question 3, montrer que

$$\mathbb{P}(Y \geq X) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \right).$$

Exercice 5. Soient $p \in]0, 1[$, et X et Y deux *var iid* suivant chacune la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$:

$$\mathbb{P}(X = k) = p(1 - p)^{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

1. Calculer $\mathbb{P}(2X = 3Y)$.
2. On pose $V = \min(X, Y)$.
 - (a) Calculer, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X \geq m)$.
 - (b) Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(V \geq k)$ et $\mathbb{P}(V \geq k + 1)$.
 - (c) Déterminer la loi de V et reconnaître une loi usuelle.

Exercice 6. Soient X , Y et Z trois *var* indépendantes admettant un moment d'ordre 2. On pose $U = X + Z$ et $V = Y + Z$. Montrer que $\mathbb{C}(U, V) = \mathbb{V}(Z)$.

Exercice 7. Soient $(\alpha, \beta) \in]0, \infty[^2$, et X et Y deux *var* indépendantes. On suppose que X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\alpha)$, et Y la loi de Poisson $\mathcal{P}(\beta)$. On pose $Z = X + Y$ (on rappelle qu'une *var* W suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ est caractérisée par $\mathbb{P}(W = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$, $k \in \mathbb{N}$).

1. Calculer la fonction génératrice de X .
2. Montrer que Z suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\alpha + \beta)$.
3. Calculer $\mathbb{E}(Z(Z - 1)(Z - 2))$ de deux manières différentes.

Bonus

Exercice 8. Soient $\lambda > 0$ et (X, Y) un couple de *var* tel que

- $(X, Y)(\Omega) = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2; i \leq j\}$,
- sa loi est donnée par

$$\mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) = e^{-2\lambda} \binom{j}{i} \frac{\lambda^j}{j!}, \quad (i, j) \in (X, Y)(\Omega).$$

1. Déterminer la loi de X . Reconnaître une loi usuelle. Calculer $\mathbb{E}(X)$.
2. Déterminer la loi de Y . Reconnaître une loi usuelle. Calculer $\mathbb{E}(Y)$.
3. Est-ce que X et Y sont indépendantes ?
4. Calculer $\mathbb{C}(X, Y)$.
5. Calculer, pour tout $(i, j) \in (X, Y)(\Omega)$, $\mathbb{P}_{\{Y=j\}}(X = i)$.

Exercice 9. Soient $\lambda > 0$, et X et Y deux *var iid* suivant chacune la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$:

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

On pose

$$Z = \begin{cases} 1 & \text{si } XY = 0, \\ 0 & \text{si } XY \neq 0. \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de Z .
2. Est-ce que Z et X sont indépendantes ?
3. On pose

$$W = \min(X, Z).$$

Déterminer la loi de W .

Exercice 10. Soient $n \in \mathbb{N}$ et X et Y deux *var iid* suivant chacune la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}, \quad k \in \{0, \dots, n\}.$$

Calculer

$$\mathbb{E} \left(\frac{(-1)^X}{1 + X + Y + XY} \right).$$