

TD n° 5 : Vecteurs et suites de Var discrètes

Exercice 1. Soient $p \in]0, 1[$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* suivant chacune la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$:

$$\mathbb{P}(X_1 = 0) = 1 - p, \quad \mathbb{P}(X_1 = 1) = p.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

1. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $m \in \{1, \dots, n\}$, la loi de S_m et la loi de $S_n - S_m$. Est-ce que S_m et $S_n - S_m$ sont indépendantes ?
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout $m \in \{1, \dots, n\}$, tout $k \in \{0, \dots, n\}$ et tout $l \in \{k, \dots, n\}$,

$$\mathbb{P}_{\{S_n=l\}}(S_m = k) = \frac{\binom{m}{k} \binom{n-m}{l-k}}{\binom{n}{l}}.$$

En déduire que, pour tout $l \in \{1, \dots, n\}$,

$$\mathbb{P}_{\{S_n=l\}}(X_1 = 1) = \frac{l}{n}.$$

Exercice 2. Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels strictement positifs et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de *var* indépendantes telles que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, X_i suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(a_i)$:

$$\mathbb{P}(X_i = k) = e^{-a_i} \frac{a_i^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

1. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de S_n .
2. Calculer, de deux manières différentes, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathbb{V}(S_n)$.

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid*. On pose $p = \mathbb{P}(X_1 > 0)$, et on suppose que $p \in]0, 1[$. On pose

$$T = \inf\{i \in \mathbb{N}^*; X_i > 0\}.$$

1. Déterminer $T(\Omega)$, ainsi que la loi de T .
2. Calculer la fonction génératrice de T .

Exercice 4. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, r_1, \dots, r_n$ $3n$ réels positifs tels que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$p_i + q_i + r_i = 1.$$

Soient $X_1, \dots, X_n$ n var indépendantes. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la loi de X_i est donnée par

$$\mathbb{P}(X_i = -1) = p_i, \quad \mathbb{P}(X_i = 0) = q_i, \quad \mathbb{P}(X_i = 1) = r_i.$$

On pose

$$Y_n = \prod_{i=1}^n X_i.$$

1. Montrer que

$$\mathbb{P}(Y_n = 0) = 1 - \prod_{i=1}^n (p_i + r_i).$$

2. Calculer $\mathbb{E}(Y_n)$ et en déduire que

$$\mathbb{P}(Y_n = 1) - \mathbb{P}(Y_n = -1) = \prod_{i=1}^n (r_i - p_i).$$

3. Déduire des questions 1 et 2 la loi de Y_n en fonction de $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, r_1, \dots, r_n$.

Exercice 5. Soient $\lambda > 0$, $p \in]0, 1[$, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de var iid suivant chacune la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$:

$$\mathbb{P}(X_1 = 0) = 1 - p, \quad \mathbb{P}(X_1 = 1) = p,$$

et N une var indépendante de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(1 - p)$:

$$\mathbb{P}(N = k) = (1 - p)p^{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

On pose

$$S_N = \sum_{i=1}^N X_i.$$

1. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $\mathbb{P}(\{S_N = k\} \cap \{N = n\})$.

2. Calculer $\mathbb{P}(S_N = 0)$.

3. Déterminer la loi de S_N (on utilisera la formule du binôme négatif : $\sum_{k=m}^{\infty} \binom{k}{m} x^{k-m} = \frac{1}{(1-x)^{m+1}}$, $x \in]-1, 1[$, $m \in \mathbb{N}$).

Exercice 6. Énoncer et démontrer la loi faible des grands nombres.

Exercice 7. On dispose d'une pièce de monnaie équilibrée. Déterminer le nombre n de lancers de cette pièce pour que l'on puisse affirmer que la fréquence des Piles obtenus diffère d'au plus 3% avec un risque d'erreur inférieur à 4% (le risque d'erreur qu'une var Y appartienne à un ensemble $\mathcal{D}$ est le réel $\alpha \in]0, 1[$ vérifiant $\mathbb{P}(Y \in \mathcal{D}) = 1 - \alpha$).