

TD n° 6 : Var à densité

Exercice 1. Déterminer l'unique entier b tel que la fonction g définie ci-dessous soit une densité :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^{b+2} & \text{si } x \in [0, 2], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 2. Soit X une var suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([0, 1])$, i.e. de densité :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}(X)$ et $\mathbb{E}(X^{2007})$.
2. Montrer que la var $Z = 1 - X$ suit la même loi que X .
3. Soit $\lambda > 0$. On pose

$$Y = -\frac{\ln(1 - X)}{\lambda}.$$

Calculer la fonction de répartition de Y , puis une densité de Y .

Exercice 3. Soient $\theta > 0$ et X une var de densité :

$$f(x) = \begin{cases} (\theta + 1)(\theta + 2)(1 - x)x^\theta & \text{si } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Vérifier que f est bien une densité.
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 4. Soient $\theta > 1$ et X une var de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x \ln(\theta)} & \text{si } x \in [1, \theta], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On dit alors que X suit la loi de Benford de paramètre θ .

1. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
2. Montrer que, pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $1 \leq a < b \leq \theta$ et $1 \leq ac < bc \leq \theta$, on a

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(ac \leq X \leq bc).$$

3. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On pose $Y = X^m$. Déterminer une densité de Y et reconnaître sa loi.

Exercice 5. Une machine usine des pièces. On désigne par X la *var* qui à chaque pièce associe sa longueur ℓ . On suppose que X suit la loi normale $\mathcal{N}(54, (0, 2)^2)$, l'unité étant le centimètre. Une pièce est considérée comme défectueuse si $\ell \leq 53,6$ centimètres ou $\ell \geq 54,3$ centimètres.

1. Calculer la probabilité qu'une pièce soit défectueuse.
2. Pour vérifier que la machine ne s'est pas dérégulée, on détermine des côtes d'alerte $c_1 = 54 - h$ et $c_2 = 54 + h$ définies par : $\mathbb{P}(c_1 \leq X \leq c_2) = 0,95$. Calculer les côtes d'alerte.

Exercice 6. Soit X une *var* suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$, *i.e.* de densité :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose $Y = \ln(e^X - 1)$.

1. Déterminer la fonction de répartition de Y , puis une densité de Y .
2. Est-ce que Y est une *var* symétrique ?
3. Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 7. Soit X une *var* suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$, *i.e.* de densité :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

On pose $T = |X| + 3$.

1. Déterminer la fonction de répartition de T en fonction de celle de X , puis une densité de T .
2. Calculer $\mathbb{E}(T)$ et $\mathbb{V}(T)$.

Exercice 8. Soit X une *var* de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(2\ln(2))(2+x)} & \text{si } x \in [-1, 2], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Calculer $\mathbb{P}(X < 0)$.
2. Calculer $\mathbb{E}(2 + X)$, $\mathbb{E}(X(2 + X))$ et $\mathbb{E}(X^2)$.
3. On pose

$$Y = \frac{1}{3 - X}.$$

Déterminer une densité de Y .

Exercice 9. Soit X une *var* suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$, *i.e.* de densité :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer la fonction caractéristique de X .

Bonus

Exercice 10. Soit X une *var* de densité :

$$f(x) = \begin{cases} 4 \frac{\ln(x)}{x^3} & \text{si } x \geq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Vérifier que f est bien une densité.
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 11. Soit X une *var* suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([-1, 1])$, *i.e.* de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x \in [-1, 1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On considère la *var* Y définie par

$$Y(\omega) = \int_{-1}^1 \inf(x, X(\omega)) dx, \quad \omega \in \Omega.$$

1. Montrer qu'il existe un réel a tel que $Y = a(X - 1)^2$.
2. Déterminer une densité de Y .
3. Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 12. Soit X une *var* de densité :

$$f(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

On pose

$$Y = \sup(X, 1 - X).$$

1. Vérifier que f est bien une densité.
2. Montrer que $Y(\Omega) = [\frac{1}{2}, \infty[$.
3. Déterminer la fonction de répartition de Y , puis une densité de Y .

Exercice 13. Soit X une *var* suivant la loi gamma $\Gamma(3, 1)$, *i.e.* de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} x^2 e^{-x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que transformée de Laplace de X est

$$L(t) = \frac{1}{(1-t)^3}, \quad t \in]-\infty, 1[.$$

2. Utiliser le résultat de la question 1 pour calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.