# TD n° 7 : Couple de *var* à densité

**Exercice 1.** Soit $(X, Y)$ un couple de *var* de densité :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2}{e-1} x e^{y} & \text{si } (x,y) \in [0,1]^2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer une densité de $X$, puis une densité de $Y$.
2. Est-ce que $X$ et $Y$ sont indépendantes ?

**Exercice 2.** Soit $(X, Y)$ un couple de *var* de densité :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } 0 \leq y \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Est-ce que $X$ et $Y$ sont indépendantes ?
2. Déterminer une densité de $X$, puis une densité de $Y$.
3. Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(XY)$. En déduire $\mathbb{C}(X, Y)$

**Exercice 3.** Soit $(X, Y)$ un couple de *var* de densité :

$$f(x,y) = \begin{cases} 60xy^2 & \text{si } x \geq 0,\ y \geq 0 \text{ et } x + y \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Est-ce que $X$ et $Y$ sont indépendantes ?
2. Déterminer une densité de $X$, puis une densité de $Y$.
3. Calculer $\mathbb{P}(X \geq Y)$.
4. Calculer $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{XY}\right)$.

**Exercice 4.** Soient $X$ et $Y$ deux *var* à densité indépendantes telles que

- une densité de $X$ est

$$f_X(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- une densité de $Y$ est

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{6} y^3 e^{-y} & \text{si } y \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose $U = XY$ et $V = (1 - X)Y$.

1. Déterminer $U(\Omega)$ et $V(\Omega)$.

2. Pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $y > 0$, on pose $u = xy$ et $v = (1 - x)y$.

   (a) Montrer que $(x, y) = \left( \frac{u}{u+v}, u + v \right)$.

   (b) Montrer que le jacobien associé au changement de variables de la question 2 (a) est

   $$J(u, v) = \frac{1}{u + v}.$$

3. Déterminer une densité de $(U, V)$.

4. Montrer que $U$ et $V$ sont *iid*. Donner une densité de $U$.

**Exercice 5.** Soient $\lambda > 0$ et $X$, $Y$ et $Z$ trois *var iid* suivant chacune la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, *i.e.* de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose $V = X + Y$ et $W = X + Y + Z$.

1. Déterminer une densité de $V$.

2. Déterminer une densité de $W$.

3. Calculer $\mathbb{E}\left( \frac{1}{(X + Y + Z)^2} \right)$.

**Exercice 6.** Une machine est composée de deux éléments $A$ et $B$, de telle sorte qu'elle ne fonctionne que si les deux éléments fonctionnent. Une étude statistique a montré que

- le temps de fonctionnement (avant la première panne) de $A$ peut être modélisé par une *var* $X$ suivant la loi exponentielle de moyenne 10 jours,

- le temps de fonctionnement (avant la première panne) de $B$ peut être modélisé par une *var* $Y$ suivant la loi exponentielle de moyenne 20 jours.

Ceux-ci sont indépendants. On s'intéresse à la *var* $W$ égale au temps de fonctionnement de la machine.

1. Exprimer $W$ en fonction de $X$ et $Y$.

2. Déterminer la fonction de répartition de $W$, puis une densité de $W$.

3. Calculer l'espérance du temps de fonctionnement de la machine.

4. Déterminer la probabilité que la première panne de la machine soit due à une panne de l'élément $A$.

# Bonus

**Exercice 7.** Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $X$ une *var* suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ et $Y = a + bX + cX^2$.

1. Calculer $\mathbb{V}(Y)$ *(on utilisera* $\mathbb{E}(X) = 0$, $\mathbb{E}(X^2) = 1$, $\mathbb{E}(X^3) = 0$ *et* $\mathbb{E}(X^4) = 3$*)*.
2. Calculer $\mathbb{C}(X, Y)$.

**Exercice 8.** Soient $\lambda > 0$, $\beta > 0$, et $X$ et $Y$ deux *var* indépendantes telles que

- $X$ suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, *i.e.* de densité :

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

- $Y$ suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\beta)$.

1. Calculer la fonction caractéristique de $X$.
2. Est-ce que $Z = X + Y$ suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda + \beta)$ ? Justifier votre réponse.

**Exercice 9.** Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $(\sigma, \delta) \in (\mathbb{R}^*)^2$, et $X$ et $Y$ deux *var* indépendantes telles que

- $X$ suit la loi normale $\mathcal{N}(\alpha, \sigma^2)$, *i.e.* de densité :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

- $Y$ suit la loi normale $\mathcal{N}(\beta, \delta^2)$.

1. Montrer que $Z = X + Y$ suit la loi normale $\mathcal{N}(\alpha + \beta, \sigma^2 + \delta^2)$ *(on rappelle que, pour une var* $W$ *suivant la loi normale* $\mathcal{N}(\gamma, \upsilon^2)$, $\varphi_W(t) = \mathbb{E}(e^{itW}) = e^{it\gamma - \frac{\upsilon^2 t^2}{2}}$, $t \in \mathbb{R}$*)*.
2. Calculer $\mathbb{E}\left((X + Y)^2\right)$.

**Exercice 10.** Soient $X$, $Y$ et $Z$ trois *var* à densité telles que

- $X$ et $Y$ sont *iid* suivant chacune la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$, *i.e.* de densité :

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- $Z$ suit la loi de Laplace $\mathcal{L}(1)$, *i.e.* de densité

$$f_Z(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

On pose $W = X - Y$.

1. Montrer que la fonction caractéristique de $Z$ est

$$\varphi_Z(t) = \frac{1}{1 + t^2}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

2. Calculer la fonction caractéristique de $X$, puis en déduire celle de $W$.
3. Utiliser les questions précédentes pour déterminer la densité de $W$.