# TD n° 8 : Vecteurs gaussiens

**Exercice 1.** Soient $X$ et $Y$ deux *var iid* suivant chacune loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On pose $U = X+Y$ et $V = X-Y$.

1. Montrer que $(U,V)^t$ est un couple gaussien.

2. Montrer que $U$ et $V$ sont indépendantes.

**Exercice 2.** Soit $(X,Y)^t$ un couple gaussien centré tel que $\mathbb{E}(X^2) = 4$ et $\mathbb{E}(Y^2) = 1$, et les *var* $2X+Y$ et $X-3Y$ sont indépendantes.

1. Déterminer la matrice de covariance de $(X,Y)^t$.

2. Montrer que $(X+Y, 2X-Y)^t$ est un couple gaussien. Déterminer sa matrice de covariance.

**Exercice 3.** Soient $X_1$ et $X_2$ deux *var iid* suivant chacune la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

Soit $Y = (Y_1, Y_2)^t$ tel que

$$Y = AX + b,$$

où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $X = (X_1, X_2)^t$ et $b = (2,3)^t$.

1. Déterminer la loi de $Y$.

2. Déterminer la loi de $(Y_1 + Y_2 + 1, 3Y_1 - Y_2)^t$.

3. Déterminer la loi de $Y_1 + Y_2 + 1$, et la loi de $3Y_1 - Y_2$.

**Exercice 4.** Soient $\rho \in ]-1,1[$ et $(X,Y)^t$ un *vectar* suivant la loi $\mathcal{N}_2(0_2, V)$, avec

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une densité de $(X,Y)^t$.

2. Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $(X, Y - aX)^t$ est un couple gaussien.

3. Déterminer l'unique réel $c$ pour lequel $X$ et $Y - cX$ sont indépendantes.

4. Calculer $\mathbb{V}(Y - cX)$, où $c$ désigne le réel déterminé à la question 3.

**Exercice 5.** Soit $(X,Y,Z)$ un vecteur gaussien. On pose $U = X+Y+Z$ et $V = X-Y$.

1. Montrer que $(U,V)$ est un couple gaussien.

2. À quelle condition sur la matrice de covariance de $(X,Y,Z)$ les *var* $U$ et $V$ sont-elles indépendantes ?

**Exercice 6.** Soit $(X_1, X_2, X_3, X_4)$ un vecteur de *var* suivant la loi normale multivariée $\mathcal{N}_4(0_4, \mathbf{V})$, avec

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(Y_1, Y_2, Y_3)$ le vecteur de *var* défini par

$$\begin{cases} Y_1 = 5X_1 + X_2 + \beta X_3 + \alpha X_4, \\ Y_2 = X_1 - X_2 + X_4, \\ Y_3 = -X_1 - X_2 + X_3. \end{cases}$$

1. Donner la loi de $X_1$, et la loi de $X_3$
2. Déterminer la loi de $(Y_1, Y_2, Y_3)$.
3. Calculer les valeurs de $\alpha$ et $\beta$ pour lesquelles les variables $Y_1$, $Y_2$ et $Y_3$ sont indépendantes. Pour de telles valeurs, calculer $\mathbb{E}(Y_1^2 Y_2^2 Y_3^2)$.

**Exercice 7.** Soit $(X, Y, Z)$ un vecteur gaussien centré tel que $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}(Z^2) = 1$ et $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(YZ) = \mathbb{E}(ZX) = \frac{1}{2}$.
Déterminer la fonction caractéristique et une densité de $(X, Y, Z)$.

**Exercice 8.** Soient $u \in ]1, \infty[$ et $(X_1, X_2, X_3)$ un vecteur de *var* de densité :

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{\sqrt{u^2 - 1}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(ux_1^2 + x_2^2 + ux_3^2 + 2x_1x_3\right)\right), \qquad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

1. Montrer que $(X_1, X_2, X_3)$ suit la loi normale multivariée $\mathcal{N}_3(0_3, D)$, avec
$$D = \frac{1}{u^2 - 1} \begin{pmatrix} u & 0 & -1 \\ 0 & u^2 - 1 & 0 \\ -1 & 0 & u \end{pmatrix}.$$
2. Donner la fonction caractéristique de $(X_1, X_2, X_3)$.
3. Déterminer la loi de $\left(X_1 + \frac{1}{u^2 - 1} X_2, X_2 + X_3\right)$.
4. Est-ce que $X_1 + \frac{1}{u^2 - 1} X_2$ et $X_2 + X_3$ sont indépendantes ?