TD n° 9 : Suites de *var*

Exercice 1. Soient $p \in]0,1[$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid*. La loi de X_1 est donnée par

$$\mathbb{P}(X_1=-1)=(1-p)^2, \qquad \mathbb{P}(X_1=0)=2p(1-p), \qquad \mathbb{P}(X_1=1)=p^2.$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose

$$Z_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1+X_i}{2}.$$

1. Calculer $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{V}(X_1)$.
2. Calculer, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(Z_n)$ et $\mathbb{V}(Z_n)$.
3. Déterminer, pour tout $\epsilon>0$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$, une majoration de $\mathbb{P}(|Z_n-p|\geq\epsilon)$ en fonction de ϵ, p et n.
4. Montrer que $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers p.
5. Retrouver le résultat de la question 4 en utilisant un théorème précis.

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* suivant chacune la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$, *i.e.* de densité :

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x} & \text{si } x\geq 0,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}-\{0,1\}$, on pose

$$Z_n=\frac{X_n}{\ln(n)}.$$

Montrer que $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}-\{0,1\}}$ converge en probabilité vers 0.

Exercice 3. Soient $\alpha\in]0,1]$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var* indépendantes telles que, pour tout $i\in\mathbb{N}^*$, X_i suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(i^{-\alpha})$:

$$\mathbb{P}(X_i=0)=1-i^{-\alpha}, \qquad \mathbb{P}(X_i=1)=i^{-\alpha}.$$

On pose

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i, \qquad Y_n=\frac{S_n}{\mathbb{E}(S_n)}.$$

Montrer que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers 1 *(on utilisera l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev)*.

Exercice 4. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* suivant chacune la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$, *i.e.* de densité :

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x} & \text{si } x\geq 0,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$W_n = \sup(X_1, \ldots, X_n) - \ln(n).$$
Étudier la convergence en loi de $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 5. Soient $\lambda > 0$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var*. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$:
$$\mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}, \qquad k \in \{0, \ldots, n\}.$$

1. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction génératrice de X_n.
2. Étudier la convergence en loi de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. *Application.* Une entreprise fabrique, en grande quantité, un certain type de composant électronique. La probabilité qu'un composant tiré au hasard dans la production soit défectueux est $0,01$. On extrait au hasard et avec remise 100 composants. Soit X la *var* égale au nombre de composants défectueux. Déterminer la loi de X et calculer la probabilité d'obtenir au moins 3 composants défectueux.

Exercice 6. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* suivant chacune la loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$, i.e. de densité :
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i, \qquad W_n = 2\sqrt{3n}\left(\overline{X}_n - \frac{1}{2}\right).$$

1. Étudier la convergence en loi de $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(2\sum_{i=1}^n X_i \geq n\right) = \frac{1}{2}.$$

Exercice 7. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* suivant chacune la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k, \qquad W_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n S_k.$$

1. Déterminer des réels $a_1, \ldots, a_n$ tels que
$$W_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n a_k X_{n-k+1}.$$
2. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction caractéristique de W_n.
3. Étudier la convergence en loi de $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.