

TD n° 7 : Plan de sondage PISR

Exercice 1. Dans une population de 3 individus $U = \{u_1, u_2, u_3\}$, on prélève au hasard et sans remise 2 individus pour former un échantillon. La *var* W égale à l'échantillon obtenu vérifie :

$$\mathbb{P}(u_1 \in W) = \frac{2}{10}, \quad \mathbb{P}(u_2 \in W) = \frac{9}{10}, \quad \mathbb{P}(W = \{u_1, u_2\}) = \frac{1}{10}.$$

1. Calculer $\mathbb{P}(W \in \{u_1, u_2, u_3\})$.
2. Calculer $\mathbb{P}(u_3 \in W)$. Est-ce un plan de sondage aléatoire de type PESR ?
3. À l'aide d'une formule de probabilités, calculer la probabilité que u_1 ou u_2 appartiennent à W . Est-ce que ce résultat est surprenant ?
4. On admet que $\mathbb{P}_{\{u_3 \in W\}}(u_1 \in W) = 1/9$. Calculer $\mathbb{P}(W = \{u_1, u_3\})$, puis $\mathbb{P}(W = \{u_2, u_3\})$.
5. Calculer $\mathbb{P}_{\{u_2 \in W\}}(u_3 \in W)$.

Exercice 2. Dans une population de 3 individus $U = \{u_1, u_2, u_3\}$, on prélève au hasard et sans remise 2 individus pour former un échantillon. La *var* W égale à l'échantillon obtenu vérifie :

$$\mathbb{P}(W = \{u_1, u_2\}) = \frac{1}{8}, \quad \mathbb{P}(W = \{u_1, u_3\}) = \frac{1}{2}.$$

On étudie un caractère Y dans U . Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, la valeur de Y pour l'individu u_i est

$$y_i = i.$$

1. Calculer $\mathbb{P}(W = \{u_2, u_3\})$.
2. Calculer, pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, $\pi_i = \mathbb{P}(u_i \in W)$. Est-ce que l'on a affaire à un plan de sondage aléatoire de type PISR ?
3. On considère la *var* :

$$\bar{y}_W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 y_i \mathbb{1}_{\{u_i \in W\}}.$$

(a) Déterminer l'ensemble des valeurs possibles de $\bar{y}_W$, ainsi que sa loi.

(b) Calculer la moyenne-population $\bar{y}_U$. Est-ce que $\mathbb{E}(\bar{y}_W) = \bar{y}_U$?

4. On considère la *var* :

$$\bar{y}_W^* = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \frac{y_i}{\pi_i} \mathbb{1}_{\{u_i \in W\}}.$$

(a) Déterminer l'ensemble des valeurs possibles de $\bar{y}_W^*$, ainsi que sa loi.

(b) Est-ce que $\mathbb{E}(\bar{y}_W^*) = \bar{y}_U$?

(c) Calculer $\mathbb{V}(\bar{y}_W^*)$.

5. (a) Calculer la matrice de variance-covariance du vecteur de $vars(\mathbb{1}_{\{u_1 \in W\}}, \mathbb{1}_{\{u_2 \in W\}}, \mathbb{1}_{\{u_3 \in W\}})$.
- (b) Retrouver la valeur de $\mathbb{V}(\bar{y}_W^*)$ à l'aide des composantes de la matrice précédente et de la formule du cours.

Exercice 3. Dans une population de 6 individus $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$, on prélève au hasard et sans remise 4 individus pour former un échantillon. La $var W$ égale à l'échantillon obtenu vérifie $\mathbb{P}(\{u_1, u_4\} \in W) = 1$ (donc on est sûr que u_1 et u_4 sont sélectionnés), et

$$\mathbb{P}_{\{\{u_1, u_4\} \in W\}}(\{u_3, u_2\} \in W) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}_{\{\{u_1, u_4\} \in W\}}(\{u_3, u_5\} \in W) = \frac{1}{3}$$

et

$$\mathbb{P}_{\{\{u_1, u_4\} \in W\}}(\{u_2, u_6\} \in W) = \frac{1}{3}.$$

Toutes les autres échantillons d'individus $\{u_i, u_j, u_k, u_\ell\}$ non-indiqués précédemment (directement ou indirectement) vérifient $\mathbb{P}(\{u_i, u_j, u_k, u_\ell\} \in W) = 0$.

1. Calculer, pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

$$\pi_i = \mathbb{P}(u_i \in W).$$

Est-ce que l'on a affaire à un plan de sondage aléatoire de type PESR ?

2. On étudie un caractère Y dans U . Pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, la valeur de Y pour l'individu u_i est

$$y_i = i.$$

On considère la var :

$$\bar{y}_W = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 \frac{y_i}{\pi_i} \mathbb{1}_{\{u_i \in W\}}.$$

- (a) Déterminer la loi de $\bar{y}_W$.
- (b) Calculer la moyenne-population $\bar{y}_U$. Est-ce que $\mathbb{E}(\bar{y}_W) = \bar{y}_U$?
- (c) Calculer $\mathbb{V}(\bar{y}_W)$.

Exercice 4. Une population est composée de 6 ménages de tailles différentes (la taille d'un ménage est le nombre de personnes physiques qu'il comprend). On a

ménage	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6
taille	2	4	3	5	1	2

On sélectionne 3 ménages sans remise, avec une probabilité proportionnelle à leur taille. Déterminer les probabilités d'appartenance des 6 ménages.