# Correction du TD n° 0

**Solution 1.** On a

$$f'(x)=2013x^{2012},\qquad g'(x)=e^{3x^2}+x6xe^{3x^2},\qquad h'(x)=\ln(1+4x^2)+x\frac{8x}{1+4x^2},$$

$$k'(x)=\frac{1+9x-x\times 9}{(1+9x)^2}=\frac{1}{(1+9x)^2},\qquad m'(x)=-\sin(x),\qquad n'(x)=2x\cos(x^2),$$

$$p'(x)=\frac{(1-e^x)(1+\sin(x))-(x-e^x)\cos(x)}{(1+\sin(x))^2},\qquad q'(x)=\frac{2}{1+2^2x^2}.$$

**Solution 2.** On a

$$I=\int_0^1\sqrt{x}dx=\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{3}.$$

On a

$$J=\int_1^4\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\left[2\sqrt{x}\right]_1^4=2(2-1)=2.$$

On a

$$K=\int_{-1}^2|x|dx=\int_{-1}^0(-x)dx+\int_0^2 xdx=-\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^0+\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}.$$

**Solution 3.** On a

$$I=\int_0^1(x^2+x+1)dx=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1=\frac{11}{6}.$$

En utilisant le fait que, pour toute fonction paire $g$, on a $\int_{-a}^a g(x)dx=2\int_0^a g(x)dx$, $a>0$, il vient

$$J=\int_{-1}^1(1-2|x|)dx=2\int_0^1(1-2x)dx=2\left[x-x^2\right]_0^1=0.$$

On a

$$\begin{aligned}K&=\int_1^2\left(x\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx=\int_1^2\left(x^{\frac{3}{2}}+3\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx\\&=\left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+3\times 2\sqrt{x}\right]_1^2=\frac{2}{5}2^{\frac{5}{2}}+6\sqrt{2}-\left(\frac{2}{5}+6\right).\end{aligned}$$

**Solution 4.** On a

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin(x)dx=\left[-\cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

On a

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos(x))dx=\left[x+2\sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}+2.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$. Par conséquent,

$$K = \int_0^2 \left(\cos^2(x) + \sin^2(x)\right) dx = \int_0^2 dx = [x]_0^2 = 2.$$

**Solution 5.** On a

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \ln(x)dx = [x\ln(x) - x]_1^2 = (2\ln(2) - 2) - (1 \times \ln(1) - 1) \\ &= 2\ln(2) - 2 + 1 = 2\ln(2) - 1. \end{aligned}$$

On a

$$J = \int_0^1 e^{2x} dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(e^2 - 1).$$

On a

$$\begin{aligned} K &= \int_1^2 2^x dx = \int_1^2 e^{x\ln(2)} dx = \left[\frac{1}{\ln(2)} e^{x\ln(2)}\right]_1^2 = \frac{1}{\ln(2)}\left(e^{2\ln(2)} - e^{\ln(2)}\right) \\ &= \frac{1}{\ln(2)}(4 - 2) = \frac{2}{\ln(2)}. \end{aligned}$$

**Solution 6.**

1. Pour tout $x \in [1, 2]$, on a
$$u'(x) = 3x^2 + 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} + 0 = 3x^2 + \ln(x) + 1.$$

2. En utilisant le résultat de la question 1, pour tout $x \in [1, 2]$, on a
$$\frac{3x^2 + \ln(x) + 1}{x^3 + x\ln(x) + 1} = \frac{u'(x)}{u(x)},$$
avec $u(x) = x^3 + x\ln(x) + 1$. Par conséquent,
$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \frac{3x^2 + \ln(x) + 1}{x^3 + x\ln(x) + 1} dx = \int_1^2 \frac{u'(x)}{u(x)} dx = [\ln u(x)]_1^2 \\ &= \left[\ln(x^3 + x\ln(x) + 1)\right]_1^2 = \ln(2^3 + 2\ln(2) + 1) - \ln(1^3 + \ln 1 + 1) \\ &= \ln(9 + 2\ln(2)) - \ln(2). \end{aligned}$$

**Solution 7.**

1. Pour tout $x \in [0, 1]$, on a
$$x - a + \frac{4}{x+2} = \frac{(x-a)(x+2) + 4}{x+2} = \frac{x^2 + (2-a)x - 2a + 4}{x+2}.$$
Par identification, on a
$$\begin{aligned} \frac{x^2 + (2-a)x - 2a + 4}{x+2} = \frac{x^2}{x+2} &\Leftrightarrow 2 - a = 0 \text{ et } -2a + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow a = 2. \end{aligned}$$

2. En utilisant le résultat de la question 1, il vient

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{x^2}{x+2}dx = \int_0^1 \left(x - 2 + \frac{4}{x+2}\right) dx \\ &= \int_0^1 x dx - 2\int_0^1 dx + 4\int_0^1 \frac{1}{x+2}dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - 2\left[x\right]_0^1 + 4\left[\ln(x+2)\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 2 + 4(\ln(3) - \ln(2)). \end{aligned}$$

**Solution 8.** On peut poser :

$$I = \int_1^e x^2 \ln(x) dx = \int_1^e u'(x)v(x)dx,$$

avec $u'(x) = x^2$ et $v(x) = \ln(x)$. On a $u(x) = \frac{x^3}{3}$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$. Une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} I &= [u(x)v(x)]_1^e - \int_1^e u(x)v'(x)dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3}\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} \times \frac{1}{x}dx = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\int_1^e x^2 dx \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{9}(e^3 - 1) = \frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

On peut poser :

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} x\sin(3x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} u'(x)v(x)dx,$$

avec $u'(x) = \sin(3x)$ et $v(x) = x$. On a $u(x) = -\frac{1}{3}\cos(3x)$ et $v'(x) = 1$. Une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} J &= [u(x)v(x)]_0^{\frac{\pi}{6}} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} u(x)v'(x)dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}\cos(3x)x\right]_0^{\frac{\pi}{6}} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(-\frac{1}{3}\cos(3x)\right) dx = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(3x)dx \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\sin(3x)\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

On peut poser :

$$K = \int_1^e (2x+1)e^x dx = \int_1^e u'(x)v(x)dx,$$

avec $u'(x) = e^x$ et $v(x) = 2x + 1$. On a $u(x) = e^x$ et $v'(x) = 2$. Une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} K &= [u(x)v(x)]_1^e - \int_1^e u(x)v'(x)dx \\ &= [(2x+1)e^x]_1^e - \int_1^e e^x \times 2dx = (2e+1)e^e - 3e - 2\left[e^x\right]_1^e \\ &= (2e+1)e^e - 3e - 2(e^e - e) = 2e^{e+1} - e^e - e. \end{aligned}$$

**Solution 9.** En faisant le changement de variables $y = \sin(x)$, il vient

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\ln(\sin(x))dx = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \ln(y)dy = [y\ln(y) - y]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \\ &= -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

**Solution 10.** En faisant le changement de variables $x = y^2$, il vient

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{y^2+y} \times 2ydy = 2\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{y+1}dy \\ &= 2\left[\ln(1+y)\right]_1^{\sqrt{2}} = 2(\ln(1+\sqrt{2}) - \ln(2)). \end{aligned}$$

**Solution 11.**

1. On peut poser :
$$I = \int_0^1 xe^x dx = \int_0^1 u'(x)v(x)dx,$$
avec $u'(x) = e^x$ et $v(x) = x$. On a $u(x) = e^x$ et $v'(x) = 1$. En faisant une intégration par parties, on obtient
$$\begin{aligned} I &= [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u(x)v'(x)dx \\ &= [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - [e^x]_0^1 = e - (e-1) = 1. \end{aligned}$$

2. En faisant le changement de variables $x = y^2$, on obtient
$$J = \int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx = \int_0^1 e^y(2y)dy = 2I.$$
En utilisant le résultat de la question 1, il vient
$$J = 2.$$

**Solution 12.** On a

$$1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}, \qquad 1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}, \qquad \sqrt{3}+i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

**Solution 13.** Un nombre complexe est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle, donc son conjugué est lui-même. Comme $|a| = 1$ et $|b| = 1$, on a $a\overline{a} = |a|^2 = 1$ et $b\overline{b} = |b|^2 = 1$, ce qui entraîne

$$\overline{a} = \frac{1}{a}, \qquad \overline{b} = \frac{1}{b}.$$

D'où
$$\overline{\frac{a+b}{1+ab}} = \frac{\overline{a}+\overline{b}}{1+\overline{a}\overline{b}} = \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{1+\frac{1}{a}\frac{1}{b}} = \frac{a+b}{1+ab}.$$
Donc
$$\frac{a+b}{1+ab} \in \mathbb{R}.$$

**Solution 14.** En utilisant $|z| = 1$, il vient

$$\begin{aligned} |1+z|^2 + |1-z|^2 &= (1+z)(\overline{1+z}) + (1-z)(\overline{1-z}) = 1 + z + \overline{z} + z\overline{z} + 1 - z - \overline{z} + z\overline{z} \\ &= 2 + 2|z|^2 = 4. \end{aligned}$$